Devoir Maison n°6

Dénombrement d'anagrammes

On appelle *anagramme* d'un mot toute suite de lettres obtenue en déplaçant les lettres du mot de départ, que cette suite de lettres ait un sens ou non.
Par exemple, *niche* et *iench* sont deux anagrammes du mot *chien*.

1. Dénombrer le nombre d'anagrammes du mot *cheval*.
2. Dénombrer le nombre d'anagrammes du mot *hippopotame*.
3. Parmi les anagrammes du mot *hippopotame*, dénombrer ceux :
   (a) qui présentent une alternance consonne / voyelle.
   (b) qui contiennent le mot *math*.
4. **Informatique** :
   (a) Dans cette question, on souhaite écrire une fonction `anagramme(L)` qui, à partir d'une liste L de lettres toutes distinctes, renvoie la liste de tous les anagrammes qu'on peut former à partir de cette liste L.
   Par exemple, `>>> anagramme (['b','o','t'])` devra renvoyer la liste (à l'ordre près) :
   `[ 'bot', 'bto', 'obt', 'otb', 'tbo', 'tob']`
   Compléter le sript suivant pour répondre au problème de façon récursive :

```
def anagramme (L) :
    if len(L) == 1 :
        return ...
    M = L[1:]      # que représente la liste M ?
    lettre, A, B = L[0], anagramme(...), []
    for mot in A :
        for i in range(len(mot)+1) :
            B.append(.........)
    return B
```

   (b) On veut maintenant écrire une fonction renvoyant les anagrammes distincts formés par les lettres d'une liste de lettres pas nécessairement distinctes.
   Modifier la fonction précédente pour répondre au problème.
5. On souhaite dénombrer les anagrammes du mot *hippopotame* dans lesquels la lettre h est placée avant les 3 lettres p. On note E leur ensemble.
   Pour tout $k \in [\![1, 11]\!]$, on note E_k l'ensemble des anagrammes de E dans lesquels la lettre h est placée en $k^{\text{ième}}$ position.
   (a) Montrer que : $\forall k \geqslant 9,\ E_k = \varnothing$.
   (b) Pour tout $k \in [\![1, 8]\!]$, montrer que : $\mathrm{card}(E_k) = \binom{11-k}{3} \times \binom{7}{2} \times 5!$
   (c) À l'aide d'une somme, donner une première formule pour $\mathrm{card}(E)$.
   (d) Pour former un anagramme de E, on décide de choisir d'abord les 4 places occupées par les lettres h, p, p, p.
   Montrer ainsi que : $\mathrm{card}(E) = \binom{11}{4} \times \binom{7}{2} \times 5!$
   (e) À l'aide d'un raisonnement analogue, montrer que :
   $$\forall (p, n) \in \mathbf{N}^2,\ \sum_{k=1}^{n-p} \binom{n-k}{p} = \binom{n}{p+1}.$$
   (f) En déduire que : $\forall (p, n) \in \mathbf{N}^2,\ \sum_{k=p}^{n-1} \binom{k}{p} = \binom{n}{p+1}$.

* * *