Exercice 1 : Des erreurs à éviter (épisode 1)

1. $u_n = n - \sqrt{1+n}$ n'est pas majorée. $\forall n \geqslant 1,\ u_n \leqslant n$, mais n n'est pas une constante...
2. $u_n = -\dfrac{1}{n+1}$ est strictement croissante... mais tend vers 0.
3. Si $u_n = -n$ est monotone, majorée par 0 mais ne converge pas.
4. $u_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n}$ est positive (strictement), converge vers 0, mais n'est pas monotone.
5. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0, mais n'est pas monotone.
6. $u_n = 1 + n(1+(-1)^n)$ est positive (strictement), n'est pas majorée, mais ne diverge pas vers $+\infty$.
7. $u_n = (-1)^n$ ne converge pas, alors que $|u_n| = 1$ converge vers 1.
   Remarque : si (u_n) converge vers ℓ, alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.
8. Si $u_n = \ln(n)$, alors $u_{n+1} - u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ converge vers 0 mais (u_n) diverge vers $+\infty$.
9. Si (u_n) converge, et si (v_n) diverge, alors $(u_n + v_n)$ diverge.

Preuve par l'absurde : si $w_n = u_n + v_n$ converge, alors $v_n = w_n - u_n$ converge par opérations : absurde !

Exercice 2 :

1. Par récurrence. **Initialisation** en 0 : $M^0|u_0 - \ell| = |u_0 - \ell|$.
   Hérédité : $|u_{n+1} - \ell| \leqslant M|u_n - \ell| \leqslant M \times M^n|u_0 - \ell| = M^{n+1}|u_0 - \ell|$.
2. (a) $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge vers 0. Par opérations, $M^n|u_0 - \ell|$ converge vers 0 donc d'après le théorème des gendarmes : $|u_n - \ell| \to 0$, c'est-à-dire (u_n) converge vers ℓ.
   (b) Il suffit que $\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell| \leqslant 10^{-3}$.
   On résout cette inéquation en appliquant ln : $n \geqslant \dfrac{\ln|u_0 - \ell| + 3\ln(10)}{\ln(2)}$

Exercice 3 :

1. $\forall n \geqslant 1,\ |s_n| \leqslant \frac{1}{n}$ et $\lim \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim s_n = 0$.
2. $\forall n \geqslant 0,\ t_n \geqslant \sqrt{n} - 1$ et $\lim(\sqrt{n} - 1) = +\infty$. Par comparaison, $\lim t_n = +\infty$.
3. $\forall n \geqslant 1,\ |w_n| = \frac{1}{n}$ et $\lim \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim w_n = 0$.
4. $\forall n \geqslant 1,\ nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$ donc en divisant par $n > 0$: $x - \frac{1}{n} < u_n \leqslant x$.
   $\lim(x - \frac{1}{n}) = \lim x = x$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim u_n = x$.

Exercice 4 :

1. $\lim \frac{1}{n} = 0$ donc (u_n) converge vers 0.
2. $\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{n} \leqslant 1$ donc $u_n < 2$. La suite (u_n) est croissante et majorée par 2.
   Elle est donc convergente, vers un réel ℓ.
   Par passage à la limite dans : $\forall\, n \in \mathbf{N}^\star,\ u_n < 1 + \dfrac{1}{n}$, on obtient : $\ell \leqslant 1$.
3. $\forall n \geqslant 1,\ 1 - \frac{1}{n} \geqslant 0$ donc (u_n) est minorée par 0. Étant décroissante, elle converge vers ℓ.
   Par passage à la limite : $1 \leqslant \ell \leqslant 2$.
4. Application de l'**exercice 2** avec $\ell = 0$ et $M = \frac{1}{2}$. (u_n) converge vers 0.

Exercice 5 :

1. Soit $n \geqslant 1$. Alors $S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ (télescopage)
   Pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{2n}$ donc $S_{2n} - S_n \geqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ (somme de constantes)
2. $\forall n \geqslant 1,\ S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$ donc (S_n) est croissante (strictement).
   Supposons qu'elle ne diverge pas vers $+\infty$. Alors elle converge vers un réel ℓ.
   Alors (S_{2n}) converge vers ℓ (suite extraite) et par opérations, $(S_{2n} - S_n)$ converge vers $\ell - \ell = 0$.
   Mais : $\forall n \geqslant 1,\ S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{1}{2}$: c'est absurde ! Conclusion : (S_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 6 :

• $v_n - u_n = \dfrac{1}{n}$ donc $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

• Monotonie de (u_n) : Soit $n \geqslant 1$. $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{d=n+2}^{2n+2} \frac{1}{d} - \sum_{d=n+1}^{2n} \frac{1}{d}$

donc par télescopage : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{(2n+1)+(2n+2)-2(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)}$

$= \dfrac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0$ donc (u_n) est croissante (strictement).

• Monotonie de (v_n) : soit $n \geqslant 1$. $v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} + \frac{1}{n+1}) - (u_n + \frac{1}{n}) = (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n(2n+1)+n(2n+2)-(2n+2)(2n+1)}{n(2n+2)(2n+1)}$

$= \dfrac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)} < 0$ donc (v_n) est décroissante (strictement).

Conclusion : (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.
Conséquence : d'après le théorème des suites adjacentes, (u_n) et (v_n) convergent, et ont même limite.

Exercice 7 : Des erreurs à éviter (épisode 2)

1. Soient $u_n = n$ et $v_n = n+1$. Alors $u_n \sim v_n$ mais $u_n - v_n$ ne tend pas vers 0.
   Soient $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$. Alors $u_n - v_n$ tend vers 0 mais (u_n) et (v_n) ne sont pas équivalentes.
2. Soit $u_n = e^n$. Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{e^{n+1}}{e^n} = e$ ne tend pas vers 1 donc u_{n+1} non équivalente à u_n.
3. **On ne peut pas sommer des équivalents.**
   Si $u_n = n^2+1$, $v_n = n^2+n$ et $w_n = -n^2$, alors $u_n \sim v_n$ mais $u_n + w_n = 1$ non équivalente à $v_n + w_n = n$.
4. **On ne peut pas prendre l'exponentielle d'un équivalent.**
   Si $u_n = n$ et $v_n = n+1$, alors $u_n \sim v_n$ mais $e^{u_n} \not\sim e^{v_n}$ (voir question 2).
5. **On ne peut pas prendre le logarithme népérien d'un équivalent de quantités > 0.**
   Si $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$, alors $u_n \sim v_n \sim 1$, mais $\ln(u_n) \sim \frac{1}{n}$ et $\ln(v_n) \sim \frac{1}{n^2}$
   donc $\ln(u_n) \not\sim \ln(v_n)$.
6. **Équivalence et monotonie n'ont rien à voir l'un avec l'autre.**
   Si $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 - \frac{1}{n}$, alors $u_n \sim v_n$ mais (u_n) décroît et (v_n) croît.
7. **La relation d'ordre ne respecte pas l'équivalence.**
   Exemple précédent et $w_n = 1$: $u_n \sim v_n$ mais $\forall n \geqslant 1,\ u_n > w_n$ et $v_n < w_n$.

Exercice 8 : Soit, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Nature de (u_n) : Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\sqrt{k} \leqslant \sqrt{n}$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.
   On somme ces inégalités pour k variant de 1 à n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n$.
   La somme de gauche est une somme de constantes, qui vaut : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.
   Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, on a : $u_n \geqslant \sqrt{n}$.
   Puisque $(\sqrt{n})_n$ diverge vers $+\infty$, par comparaison : $\boxed{(u_n)_n \text{ diverge vers } +\infty.}$
2. Technique de l'expression conjuguée :
   Pour tout $n \geqslant 1$: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
   et : $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \dfrac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \dfrac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$.
   Mais : $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} \leqslant 2\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$, donc : $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$.
   On en déduit que : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.}$

3. <u>Équivalent de $(u_n)_n$:</u>
On somme les encadrements précédents (après avoir remplacé n par k), pour $k \in [\![1,n]\!]$:
$\forall n \geqslant 1,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right).$
Les sommes extrêmes sont télescopiques, on les calcule. La somme du milieu est la moitié de u_n :
$\forall n \geqslant 1,\ \sqrt{n+1}-\sqrt{1} \leqslant \dfrac{1}{2}u_n \leqslant \sqrt{n}-\sqrt{0}.$
Et en divisant par $\sqrt{n}$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{n+1}-1) \leqslant \dfrac{u_n}{2\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \times \sqrt{n}.$
Le théorème des gendarmes permet de conclure que : $\lim \dfrac{u_n}{2\sqrt{n}} = 1$, ce qui signifie : $\boxed{u_n \sim 2\sqrt{n}.}$
Remarque : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$ et $\displaystyle\int_0^n \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{n}.$

Exercice 9 :
1. $\dfrac{r_n}{n} = \dfrac{n+1}{n} = 1+\dfrac{1}{n} \longrightarrow 1$, donc $r_n \sim n$.
2. $\dfrac{s_n}{n} = \dfrac{n+\ln n}{n} = 1+\dfrac{\ln n}{n} \longrightarrow 1$ par croissances comparées, donc $s_n \sim n$.
3. $e^{-n}\,t_n = e^{-n}(n+e^n) = 1+ne^{-n} \longrightarrow 1$ par croissances comparées, donc $t_n \sim e^n$.
4. $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$: pas d'équivalent plus simple : $u_n \sim \dfrac{\ln n}{n}$.
5. $\dfrac{v_n}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n+1}-\ln n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \longrightarrow 1$ par croissances comparées, donc $v_n \sim \sqrt{n}$.
6. $w_n = \dfrac{n^3+3n-2}{n^2-6} \sim \dfrac{n^3}{n^2} = n$ par quotient d'équivalents et règle sur les fonctions polynomiales.
7. $\dfrac{\sin n}{n} \to 0$ donc $\dfrac{\sin n}{n} = \mathrm{o}(1)$ donc $\left(-1+\dfrac{\sin n}{n}\right) \sim -1$.
$e^{-n}+1 \to 1$ et $n^2 \to +\infty$ donc $e^{-n}+1 = \mathrm{o}(n^2)$ donc $(n^2+e^{-n}+1) \sim n^2$.
Par produit d'équivalents : $x_n = \left(-1+\dfrac{\sin n}{n}\right)(n^2+e^{-n}+1) \sim -n^2$.

Exercice 10 :
1. $n^3 = \mathrm{o}(3^n)$ donc $3^n+n^3 \sim 3^n$. $\quad n^4 = \mathrm{o}(4^n)$ donc $4^n+n^4 \sim 4^n$.
Par quotient d'équivalents : $u_n = \dfrac{3^n+n^3}{4^n+n^4} \sim \dfrac{3^n}{4^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. $\quad (u_n)$ converge vers 0.
2. $\sin n = \mathrm{o}(n)$ et $\ln n = \mathrm{o}(n)$ donc $n+\sin n \sim n$ et $n+\ln n \sim n$.
Par quotient d'équivalents : $u_n = \dfrac{n+\sin n}{n+\ln n} \sim \dfrac{n}{n} = 1$. $\quad (u_n)$ converge vers 1.
3. $u_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right) = \sqrt{n}\left((1+\frac{1}{\sqrt{n}})^{\frac{1}{2}}-1\right) \sim \sqrt{n}\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ car $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.
donc $u_n \sim \dfrac{1}{2}$. En conséquence, (u_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.
4. $u_n = \dfrac{n}{n^{\ln n}} = n^{1-\ln n}$. Pas d'équivalent plus simple. Par opérations, (u_n) converge vers 0.
5. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$ car $\dfrac{1}{n} \to 0$.
Par produit d'équivalents, $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim n \times \dfrac{1}{n} = 1$ donc $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \to 1$.
Par **composée de limites** : $u_n \to e^1 = e$. Ainsi, $u_n \sim e$.
6. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times e^{n\ln(1+\frac{2}{n})}$.
$\dfrac{2}{n} \to 0$ donc $\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right) \sim \dfrac{2}{n}$ et $n\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right) \sim n \times \dfrac{2}{n} = 2$ donc converge vers 2.
Par composée de limites, $e^{n\ln(1+\frac{2}{n})} \to e^2$ donc équivaut à e^2.
Par produit d'équivalents : $u_n \sim e^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, et converge donc vers 0 (car $-1 < \frac{1}{2} < 1$).

7. $a > b \geqslant 0$ donc $\left(\dfrac{b}{a}\right)^n \to 0$. Ainsi, $b^n = \mathrm{o}(a^n)$, donc $a^n - b^n \sim a^n$ et $a^n + b^n \sim a^n$.

   Par quotient d'équivalents, $u_n \sim \dfrac{a^n}{a^n} = 1$, donc converge vers 1.

Exercice 11 :

1. $3\ln n = \mathrm{o}(n)$ donc $n + 3\ln n \sim n$ et par produit : $u_n \sim ne^{-(n+1)}$.
   Par croissances comparées, $\lim u_n = 0$.
2. $\ln(n^2+1) - \ln(n^2) = \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) \to 0$ et $\ln(n^2) \to +\infty$

   donc $\ln(n^2+1) \sim \ln(n^2) = 2\ln n$. De plus, $n+1 \sim n$ donc par quotient : $u_n \sim \dfrac{2\ln n}{n}$.
   Par croissances comparées, (u_n) converge vers 0.
3. Par règle du monôme dominant : $n^2+n+1 \sim n^2$ et $n^2-n+1 \sim n^2$.
   On peut élever un équivalent à une puissance fixée (ici : $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$) :
   $\sqrt{n^2+n+1} \sim \sqrt{n^2} = n$ et $\sqrt[3]{n^2-n+1} \sim \sqrt[3]{n^2} = n^{\frac{2}{3}}$.
   Par quotient d'équivalents, $u_n \sim \dfrac{n}{n^{\frac{2}{3}}} = n^{\frac{1}{3}}$. Ainsi, (u_n) diverge vers $+\infty$.
4. Comme ci-dessus : $\sqrt{n^2+1} \sim \sqrt{n^2} = n$ donc $\sqrt{n^2+1} = \mathrm{o}(n^3)$ donc $n^3 - \sqrt{n^2+1} \sim n^3$.

   De plus, $n^2+1 \sim n^2$ donc par quotient $u_n \sim \dfrac{n^3}{n^2} = n$ et $\lim u_n = +\infty$.
5. $-\ln n + 1 = \mathrm{o}(2n^3)$ donc $2n^3 - \ln n + 1 \sim 2n^3$. De plus, $n^2+1 \sim n^2$.

   Par quotient d'équivalents, $u_n \sim \dfrac{2n^3}{n^2} = 2n$, et $\lim u_n = +\infty$.
6. $e^n = \mathrm{o}(n!)$ et $2^n = \mathrm{o}(3^n)$ donc $u_n \sim \dfrac{n!}{3^n}$ et par croissances comparées, $\lim u_n = +\infty$.
7. $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{(n+1)-(n-1)}{(n-1)(n+1)} = \dfrac{2}{n^2-1} \sim \dfrac{2}{n^2}$ et $\lim u_n = 0$.
8. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \sim \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ car $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$. De plus, $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$ donc $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.
9. $u_n = \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln(1+t_n)$ avec $t_n = \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \to 0$ donc $u_n \sim t_n$.

   De plus, $t_n \sim -\dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{n}\right)^2$ car $\dfrac{1}{n} \to 0$. Ainsi, $u_n \sim -\dfrac{1}{2n^2} \to 0$.

Exercice 12 : $\quad * \; u_n = n\sqrt{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2+2}\right)}$

$\dfrac{1}{n^2+2} \to 0$ donc $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2+2}\right) \sim \dfrac{1}{n^2+2} \sim \dfrac{1}{n^2}$, donc $u_n \sim n\sqrt{\dfrac{1}{n^2}} = 1$. Ainsi, $\lim u_n = 1$.

$* \; v_n = \left(1 + \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n = e^{n\ln(1+\sin(\frac{1}{n}))}$. $\quad \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \to 0$ donc $\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \sim \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$.

Par produit : $n\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \sim n \times \dfrac{1}{n} = 1$ donc converge vers 1.

Par composée de limites : $v_n \to e^1$ (et donc $v_n \sim e$).

Exercice 13 : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction croissante

1. <u>Étude de la fonction f telle que $f(u_n) = u_{n+1}$</u>

   On pose $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.

   f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}^\star$, et $\forall x \neq 0,\ f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-2}{2x^2}$.

D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Un intervalle stable par f qui contient u_0

   $u_0 = 4$ et on voit d'après le tableau de variations que $f([\sqrt{2}, +\infty[) = [\sqrt{2}, +\infty[$, donc
   $\boxed{I = [\sqrt{2}, +\infty[\text{ est stable par } f \text{ et } u_0 \in I.}$
3. Toutes les valeurs de la suite $(u_n)_n$ sont dans I

   Soit $n \in \mathbf{N}$. On note $\mathcal{P}_n$: « $u_n \in I$ ». On raisonne par récurrence :
   • Initialisation pour $n = 0$: $u_0 = 4 \in I$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   • Hérédité : soit $n \geqslant 0$. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie.
   Alors $u_n \neq 0$ donc u_{n+1} exite, et $u_n \in I$ avec I stable par f, donc $f(u_n) = u_{n+1} \in I$.
   Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   • Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ u_n \text{ existe et } u_n \in I.}$
4. $(u_n)_n$ est décroissante

   Soit $n \in \mathbf{N}$. On note $\mathcal{Q}_n$: « $u_{n+1} < u_n$ ». On raisonne par récurrence :
   • Initialisation : $u_0 = 4$ et $u_1 = f(4) = 2,25$ donc $u_1 < u_0$: $\mathcal{Q}_0$ est vraie.
   • Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Supposons $\mathcal{Q}_n$ vraie. Alors $u_{n+1} < u_n$ et on applique la fonction f : $f(u_{n+1}) < f(u_n)$ car f est croissante sur I et $u_n, u_{n+1} \in I$.
   Cela donne : $u_{n+2} < u_{n+1}$, donc $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.
   • Conclusion : $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} < u_n$, donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_n \text{ est strictement décroissante.}}$
5. La suite $(u_n)_n$ converge vers $\sqrt{2}$

   La suite $(u_n)_n$ est décroissante, et minorée par $\sqrt{2}$. Elle est donc convergente vers $\ell \geqslant \sqrt{2}$.
   Pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$ et par opérations : $\lim \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{2}{\ell}\right)$
   Par ailleurs, $\lim u_{n+1} = \ell$ donc par unicité de la limite : $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{2}{\ell}\right)$.
   La résolution de cette équation donne $\ell = \pm\sqrt{2}$.
   Mais puisque $\ell \geqslant \sqrt{2}$, on conclut : $\boxed{(u_n)_n \text{ converge vers } \sqrt{2}.}$

Exercice 14 : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction décroissante

1. Étude de la fonction f telle que $f(u_n) = u_{n+1}$

   On pose $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$.
   f est définie et dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$, et $\forall x \neq -1,\ f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} < 0$.
   D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0

2. <u>Intervalle stable par f qui contient tous les termes de la suite $(u_n)_n$</u>
   $f(0) = 1$ donc $I = [0, 1]$ est stable par f d'après le tableau de variations.
   $u_0 = 0 \in I$ donc comme pour l'exercice précédente, on montre par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \in I$ (et donc $u_n \neq -1$ ce qui justifie l'existence de tous les termes de la suite).
3. <u>Étude des suites extraites de rangs pairs et impairs</u>
   On calcule : $u_1 = f(u_0) = f(0) = 1$ puis $u_2 = f(u_1) = f(1) = \dfrac{1}{2}$. On constate que $u_0 < u_2$.
   Soit $n \in \mathbf{N}$. On pose $\mathcal{P}_n$: « $u_{2n} < u_{2n+2}$ et $u_{2n+1} > u_{2n+3}$ ». On raisonne par récurrence :
   • Initialisation. On a vu que $u_0 < u_2$. On applique f strictement décroissante sur I :
   $f(u_0) > f(u_2)$ donc $u_1 > u_3$. Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   • Hérédité : soit $n \geqslant 0$. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie.
   Alors $u_{2n+1} > u_{2n+3}$ et on applique f strictement décroissante sur I : $f(u_{2n+1}) < f(u_{2n+3})$ donc $u_{2n+2} < u_{2n+4}$. On applique f à nouveau : $f(u_{2n+2}) > f(u_{2n+4})$, donc $u_{2n+3} > u_{2n+5}$.
   Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   • Conclusion : $\forall n \geqslant 0,\ u_{2n} < u_{2n+2}$ et $u_{2n+1} > u_{2n+3}$.
   $\boxed{\text{La suite } (u_{2n})_n \text{ est strictement croissante, et la suite } (u_{2n+1})_n \text{ est strictement décroissante.}}$
   Ces deux suites sont bornées (par 0 et 1), donc $\boxed{\text{elles sont convergentes.}}$
4. <u>La suite $(u_n)_n$ est convergente</u>
   Notons $\ell = \lim u_{2n}$, et $\ell' = \lim u_{2n+1}$.
   Soit $n \in \mathbf{N}$. On a $u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = \dfrac{1}{1 + u_{2n+1}} = \dfrac{1}{1 + f(u_{2n})} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+u_{2n}}}$.
   Par passage à la limite : $\ell = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\ell}} = \dfrac{1+\ell}{2+\ell}$
   donc $\ell(2 + \ell) = 1 + \ell$, d'où : $\ell^2 + \ell - 1 = 0$.
   On résout cette équation : $\ell = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Et puisque $0 \leqslant \ell \leqslant 1$, alors $\ell = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.
   Un raisonnement analogue montre que : $\ell' = \ell = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.
   Les suites de rangs pairs et impairs sont donc convergentes vers la même limite.
   Cela prouve que la suite $(u_n)_n$ est convergente, vers cette limite commune.
   $\boxed{(u_n)_n \text{ converge vers } \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}.}$