Dénombrement

1 Cardinal d'un ensemble fini

Définition

Soit E un ensemble fini. On appelle **cardinal de** E et on note $\mathrm{card}(E)$ ou $\#E$ le nombre d'éléments de E.

Dans tout le chapitre, E désigne un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbf{N}$.
On peut toujours compter les n éléments d'un tel ensemble E du premier au $n^{\text{ième}}$:
si $E = \{e_1, ..., e_n\}$, on peut associer à chaque élément $e_i \in E$ l'entier $i \in [\![1, n]\!]$, et inversement associer à chaque entier $i \in [\![1, n]\!]$ l'unique élément $e_i \in E$.
On dira que E peut être mis en **bijection** avec $[\![1, n]\!]$.

Théorème

Soit E un ensemble fini, et $A \subset E$.

Alors A est fini et $\operatorname{card}(A) \leqslant \operatorname{card}(E)$.

De plus, si $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(E)$, alors $A = E$.

Théorème

Soient E, F deux ensembles finis.
Alors E et F ont **même cardinal** si, et seulement si, E et F sont en bijection.

Schéma :

2 Réunion et ensembles finis

On considère ici des sous-ensembles $A, B, (A_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ d'un ensemble fini E de cardinal $n \in \mathbf{N}$.

Théorème

Si A et B sont **disjoints**, c'est-à-dire d'intersection vide, alors :

$$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}\, A + \mathrm{card}\, B$$

Si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une famille de parties **deux à deux disjointes**, alors :

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{card}\, A_i$$

Attention : Il ne suffit pas ici que $\bigcap_{i=1}^{p} A_i = \varnothing$

Corollaire

Soit $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Alors $\operatorname{card} \overline{A} = \operatorname{card} E - \operatorname{card} A$

Théorème

Dans le cas général, on a : $\boxed{\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)}$

3 Cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis

Théorème

Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini, et $\boxed{\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card} E \times \operatorname{card} F}$

Soit $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille finie d'ensembles finis.

Alors le produit cartésien $\prod_{i=1}^{p} E_i$ est un ensemble fini, de cardinal :

$$\operatorname{card}\left(\prod_{i=1}^{p} E_i\right) = \prod_{i=1}^{p} \operatorname{card}(E_i)$$

Corollaire

Soit $k \in \mathbf{N}^\star$. Alors : $\operatorname{card}(E^k) = (\operatorname{card} E)^k$

II p-liste d'un ensemble de cardinal n

1 Tirages successifs avec remise

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbf{N}$, soit un entier $p \in \mathbf{N}$.
On dit qu'on effectue un **tirage successif avec remise** (ou avec répétitions) lorsqu'on constitue une liste **ordonnée** de p éléments de l'ensemble E, avec la possibilité de faire figurer dans la liste plusieurs fois le même élément. On appelle **p-liste** de E (ou p-uplet) toute liste ainsi constituée.

2 Nombre de p-listes

THÉORÈME

> Il existe n^p p-listes différentes d'un ensemble de cardinal n.

III Arrangements, permutations

1 Tirages successifs sans remise

Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit p un entier de $[\![0, n]\!]$.
On dit qu'on effectue un **tirage successif sans remise** (ou sans répétition) lorsqu'on constitue une liste **ordonnée** de p éléments **tous distincts** de E.
On appelle **arrangement de p éléments de E**, tout p-uplet formé d'éléments de E, tous distincts.

2 Nombre d'arrangements

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble de n éléments est noté A_n^p.

Proposition

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $p \in [\![0, n]\!]$.

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble de n éléments est : $\boxed{A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$

3 Permutations

On dit qu'on effectue une **permutation** d'un ensemble fini E de cardinal n lorsqu'on constitue un arrangement de n éléments de E.

PROPOSITION

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

$\boxed{\text{Le nombre de permutations d'un ensemble de } n \text{ éléments est } n!}$.

IV Combinaisons

1 Tirage simultané

Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit p un entier de $[\![0, n]\!]$.
On dit qu'on effectue un **tirage simultané** lorsqu'on pioche simultanément p éléments parmi les n éléments de l'ensemble E.

Ces éléments sont donc tous distincts, et l'ordre dans lequel ils sont choisis n'intervient pas. Cela revient à constituer un **sous-ensemble à p éléments** de l'ensemble E.

On appelle **combinaison de p éléments de E** tout sous-ensemble de E à p éléments.

2 Nombre de combinaisons

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble de n éléments est noté $\binom{n}{p}$.

Proposition

Soient $n \in \mathbf{N}^\star$ et $p \in [\![0, n]\!]$.

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble de n éléments est :

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

3 Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini

Théorème

On considère un ensemble fini E de cardinal n.

Alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini, et $\boxed{\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n}$

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="2">Avec répétition</th></tr>
<tr><th colspan="2"></th><th>OUI</th><th>NON</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Liste ordonnée</th><th>OUI</th><td>p-listes
n^p</td><td>p-arrangements
$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$</td></tr>
<tr><th>NON</th><td>(p-suites)</td><td>p-combinaisons
$\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$</td></tr>
</table>