

Exercice 1 :

1. Une *main* à la belote est une **combinaison** de 8 cartes choisies parmi 32. Il y en a $\binom{32}{8}$.
2. Une *main* au poker est une **combinaison** de 5 cartes choisies parmi 52. Il y en a $\binom{52}{5}$.
3. En lançant 5 dés successivement, on effectue une **5-liste** de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Il y a donc 6^5 tirages possibles.
4. En jouant 11 fois de suite à *pile ou face*, on effectue une **11-liste** de l'ensemble $\{pile, face\}$, de cardinal 2. Il y a donc 2^{11} tirages possibles.
5. Un prélèvement successif de 3 cartes sans remise est un **arrangement** de 3 éléments choisis parmi 32. Il y en a $A_{32}^3 = 32 \times 31 \times 30$.
6. Un prélèvement successif de 3 cartes avec remise est une **3-liste** d'un ensemble à 32 éléments. Il y en a 32^3 .
7. *chaise* ne comporte pas deux fois la même lettre. Un anagramme de ce mot est donc une **permutation** de l'ensemble de ses lettres. Il y en a donc $6!$.
8. C'est une **permutation** d'un ensemble à 3 éléments : il y en a $3!$.

Exercice 2 :

"au moins un coeur" est un regroupement de tirages qu'il est assez difficile d'énumérer (*exactement* un coeur, ou *exactement* 2 coeurs, ou *exatement* 3 coeurs).

Il est plus simple d'énumérer les tirages qui ne conviennent pas, soit ceux ne comportant *aucun* coeur.

Un tirage ne comportant aucun coeur est un **arrangement** de 3 cartes parmi les 24 cartes qui ne sont pas des coeurs : il y en a $A_{24}^3 = 24 \times 23 \times 22$.

On a déjà vu qu'il y avait au total $A_{32}^3 = 32 \times 31 \times 30$ tirages possibles.

Il y a donc $32 \times 31 \times 30 - 24 \times 23 \times 22$ tirages contenant au moins un coeur.

Exercice 3 :

Un tirage successif et sans remise de 4 boules parmi 11 est un **arrangement** : il y en a $A_{11}^4 = 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 7920$.

Pour dénombrer les tirages convenables, il s'agit de choisir une boule noire parmi les 5, puis de décider son rang de sortie : il y a $5 \times 4 = 20$ possibilités.

Il faut ensuite constituer un arrangement de 3 boules blanches parmi les 6 : il y en a $A_6^3 = 120$. Finalement, il y a $20 \times 120 = 2400$ tirages convenables.

Exercice 4 :

1. a. Un mot de 5 lettres est une 5-liste de l'alphabet choisi (ici de cardinal 6). Il y en a 6^5 .

- b. Si les 5 lettres sont distinctes, on effectue un arrangement :

il y en a $A_6^5 = 6!$

- c. Pour écrire un mot de 5 lettres comportant 2 *a* et 3 *b*, il suffit de choisir les places des lettres *a* dans le mot. On choisit donc un sous-ensemble à 2 éléments d'un ensemble de places à 5 éléments. C'est une combinaison de 2 parmi 5, et il y en a $\binom{5}{2} = 10$.
- d. On choisit ici la place des *a* (10 choix possibles, comme ci-dessus) puis la place du *c* : 3 choix possibles. Il y a donc 30 mots de 5 lettres s'écrivant avec 2 *a*, 2 *b* et 1 *c*.
- e. Comme ci-dessus, on a 30 choix pour placer 2 *a* et 1 *b*. Il faut ensuite compléter le mot avec 2 lettres choisies dans l'alphabet $\{c, d, e, f\}$ de cardinal 4 : il y a 4^2 choix possibles. Ainsi, il y a $30 \times 16 = 480$ mots convenables.

2. *BCPST* est un mot de 5 lettres distinctes : il admet $5!$ anagrammes.

3. *ornithorynque* comporte 13 lettres dont 2 *o*, 2 *r* et 2 *n*.

Plaçons d'abord les *o* : on choisit 2 places parmi 13. Il y a $\binom{13}{2}$ choix.

Plaçons ensuite les *r* parmi les 11 places restantes : il y a $\binom{11}{2}$ choix.

Plaçons ensuite les *n* : $\binom{9}{2}$ choix. Il faut enfin permuter les 7 lettres restantes : $7!$ choix. *ornithorynque* admet donc :

$$\binom{13}{2} \times \binom{11}{2} \times \binom{9}{2} \times 7! = 778377600 \text{ anagrammes.}$$

Exercice 5 :

Nous devons d'abord décider si les boeufs peuvent se distinguer, hormis leur race. Supposons dans un premier temps que oui :

1. Un *troupeau* est un sous-ensemble à 10 éléments d'un ensemble de 27 boeufs : il y en a $\binom{27}{10} = 8436285$.
2. Un troupeau *mixte* est l'union d'un ensemble à 5 éléments choisis parmi 15 charolais, et d'un ensemble à 5 éléments choisis parmi 12 limousins. Il y en a $\binom{15}{5} \times \binom{12}{5} = 2378376$.
3. Les troupeaux ne contenant pas *au moins* 2 charolais en contiennent 1 ou aucun. Constituer un troupeau sans charolais revient à choisir 10 animaux parmi les 12 limousins : $\binom{12}{10} = \binom{12}{2} = 66$ possibilités. Constituer un troupeau avec *exactement* 1 charolais revient à choisir 1 charolais parmi 15, puis 9 limousins parmi 12 : $\binom{15}{1} \times \binom{12}{9} = 15 \times 220 = 3300$ possibilités. Finalement, il y a $\binom{27}{10} - 3366$ troupeaux contenant au moins 2 charolais

Si on ne fait pas la différence entre 2 charolais, ni entre 2 limousins :

1. Un *troupeau* est un nombre de charolais, choisi entre 0 et 10 (les autres bêtes étant donc des limousins). Il y a 11 troupeaux possibles.
2. Un seul troupeau contient autant de chaque race : celui constitué de 5 charolais et de 5 limousins.
3. 9 troupeaux contiennent au moins 2 charolais.

Exercice 6 :

Indiscernable peut signifier 2 choses : *indiscernable au toucher*, ce qui sous-entend que lorsqu'on les tire de l'urne, chaque boule a la même probabilité d'être tirée (on ne peut pas la choisir en la reconnaissant au toucher). Ceci s'applique en général aux exercices de probabilité. *Indiscernable* entre elles signifie que, même après les avoir tirées, on ne fait pas de différence entre 2 boules de même couleur (comme pour les boeufs de même race), contrairement aux exercices où l'on parle de boules *numérotées*.

Dans la correction ci-dessous, on l'entend dans ce deuxième sens.

1. Un tirage est constitué d'une 6-liste d'un ensemble à 2 éléments : $\{\text{blanc}, \text{noir}\}$. Il y a donc $2^6 = 64$ tirages possibles.
2.
 - a. Un seul tirage convient : le tirage *BBBBBN*.
 - b. Un seul tirage ne comporte pas de boule noire : le tirage *BBBBBB*. 6 tirages comportent exactement 1 boule noire, chacun correspondant à la place de la boule noire tirée. Il y a donc au total 7 tirages comportant une boule noire au plus.
 - c. Constituer un tirage avec 3 boules blanches et 3 boules noires revient à décider des positions des 3 boules blanches : il y a $\binom{6}{3} = 20$ possibilités.
 - d. Un seul tirage ne comporte pas de boule blanche : le tirage *NNNNNN*. Tous les 63 autres comportent au moins une boule blanche.

Reprenons l'exercice en supposant maintenant les boules numérotées. L'ensemble sur lequel on travaille n'est plus $\{B, N\}$ mais $\{B_1 \dots B_5, N_1 \dots N_8\}$, de cardinal 13.

1. Un tirage est constitué d'une 6-liste d'un ensemble à 13 éléments. Il y a donc $13^6 = 4826809$ tirages possibles.
2.
 - a. Les cinq premières boules tirées constituent une 5-liste d'un ensemble à 5 éléments (les boules blanches). Il y a 5^5 possibilités. La dernière boule tirée est une 1-liste d'un ensemble à 8 éléments (les boules noires). Il y a 8^1 possibilités. Ainsi, $5^5 \times 8^1 = 25000$ tirages conviennent.
 - b. Un tirage sans boule noire correspond à une 6-liste de l'ensemble des boules blanches : 5^6 possibilités. Un tirage avec *exactement* 1 boule

noire correspond au choix d'une boule noire parmi 8 (8 choix) et de sa place dans le tirage (6 choix), puis de la constitution d'une 5-liste de boules blanches : 5^5 possibilités. Il y a donc $5^6 + 8 \times 6 \times 5^5 = 165625$ tirages comportant au plus une boule noire.

- c. Constituer un tirage avec 3 boules blanches et 3 boules noires revient à constituer une 3-liste de boules blanches (5^3 choix) puis décider de leurs positions dans le tirage ($\binom{6}{3} = 20$ possibilités) puis compléter par une 3-liste de boules noires (8^3 choix).

Ainsi, il y a $5^3 \times \binom{6}{3} \times 8^3 = 1280000$ tirages convenables.

- d. 8^6 tirages ne contiennent que des boules noires. Tous les autres comportent au moins une boule blanche : il y en a donc $13^6 - 8^6 = 4564665$.

Exercice 7 :

1. Constituer une *main* consiste à choisir 8 cartes parmi 32 : chaque main est un sous-ensemble à 8 éléments d'un ensemble à 32 éléments.

Il y a donc $\binom{32}{8}$ mains possibles, soit : 10518300.

2. Il est plus simple de compter les mains qui ne contiennent pas d'as. Celles-ci sont des sous-ensembles à 8 éléments d'un ensemble à 28 éléments (c'est-à-dire les 28 cartes qui ne sont pas des as). Il y en a donc $\binom{28}{8}$.

Par différence, il y a $\binom{32}{8} - \binom{28}{8} = 7410195$ mains avec au moins un as.

3. Pour constituer une main contenant exactement un roi, on peut d'abord choisir 1 roi parmi les 4 (soit $\binom{4}{1} = 4$ choix), puis compléter la main par 7 cartes qui ne sont pas des rois, donc choisies parmi les 28 cartes restantes. Il y a donc $4 \times \binom{28}{7} = 4736160$ mains qui contiennent exactement 1 roi.

4. Procédons encore par différence : il y a $\binom{21}{8}$ mains ne contenant ni coeur, ni dame, car il s'agit alors de choisir 8 cartes parmi les 21 qui ne sont ni des dames ni des coeurs.

Toutes les autres mains contiennent au moins un coeur ou une dame.

Il y en a : $\binom{32}{8} - \binom{21}{8} = 10314810$.

5. Comptons séparément :

- les mains unicolores,
- les mains bicolores.

Il y a $4 \times \binom{8}{8} = 4$ mains unicolores : celle constituée de tous les piques, celle constituée de tous les trèfles...

Pour constituer une main bicolore, on peut d'abord choisir 2 couleurs parmi 4 ($\binom{4}{2} = 6$ choix), puis choisir 8 cartes parmi les 16 cartes des couleurs retenues ($\binom{16}{8}$ choix). On prend soin de retirer les 2 choix correspondant aux mains unicolores, déjà comptées.

Il y a donc $6 \times \left(\binom{16}{8} - 2\right) = 77208$ mains bicolores.

Conclusion : il y a 77212 mains ne contenant que des cartes de 2 couleurs au plus.

Exercice 8 :

1. Disposer 10 livres distincts revient à effectuer une permutation d'un ensemble à 10 éléments.
Il y a $10! = 3628800$ dispositions possibles.
2. On commence par disposer les 7 autres livres : il y a $7! = 5040$ choix.
On choisit ensuite à quel endroit viennent s'insérer les 3 livres de mathématiques : en tête, en second... en dernier, ce qui fait 8 possibilités.
Il faut enfin choisir comment les 3 livres de maths sont disposés entre eux ($3! = 6$ possibilités).
Ainsi, il y a $7! \times 8 \times 3! = 241920$ dispositions plaçant ensemble les 3 livres de maths.
3. Il faut choisir l'ordre des matières : $4! = 24$ choix.
Puis dans chaque matière l'ordre des livres : $n!$ choix dès qu'on a n livres dans une matière.
Conclusion : il y a $4! \times (3!)^2 \times (2!)^2 = 3456$ dispositions possibles.

Exercice 9 :

Il est plus simple de compter les dispositions qui ne laissent aucune case vide. Si chaque case reçoit au moins un pion, alors il y a une case recevant 2 pions et les autres cases reçoivent exactement 1 pion.
Il y a 3 choix pour la case recevant 2 pions, et il y a $\binom{4}{2} = 6$ choix pour les 2 pions qu'elle reçoit.
Il y a ensuite 2 choix pour placer les 2 derniers pions dans les 2 autres cases.
Ainsi, $3 \times 6 \times 2 = 36$ placement ne laissent aucune case vide.
Le nombre total de placements est $3^4 = 81$ car chacun des 4 pions peut être placé dans n'importe laquelle des 3 cases.
Conclusion : il y a $81 - 36 = 45$ placements qui laissent au moins une case vide.

Exercice 10 :

- On choisit 2 chaussures parmi 20 : il y a $\binom{20}{2} = 190$ tirages possibles.
- Il y a $\binom{10}{2} = 45$ tirages amenant 2 chaussures noires, $\binom{6}{2} = 15$ tirages de chaussures vertes et $\binom{4}{2} = 6$ tirages de chaussures rouges.
Il y a donc $45 + 15 + 6 = 66$ tirages de chaussures de même couleur.
- Il y a 10 chaussures gauches et 10 chaussures droites, donc $\binom{10}{1} = 10$ possibilités de tirer une chaussure gauche, et 10 pour une chaussure droite. Ainsi, $10 \times 10 = 100$ tirages amènent une chaussure gauche et une chaussure droite.

Attention : ce n'est pas 1 sur 2 !

- Il y a $5^2 = 25$ tirages amenant une paire de chaussures noires (5 choix pour le pied gauche noir, 5 choix pour le pied droit noir), et de la même façon 9 paires vertes et 4 paires rouges.
Au total, il y a $25 + 9 + 4 = 38$ tirages reconstituant une paire de chaussure.

Exercice 11 :

1. Une partie de E qui contient A est formée par l'union de A et d'une partie quelconque de $\overline{A}$.
Puisque $\text{card}(\overline{A}) = n - p$, le nombre de parties de $\overline{A}$ est 2^{n-p} .
Il y a donc 2^{n-p} parties de E qui contiennent A .
2. Une partie de E disjointe de A est incluse dans $\overline{A}$: c'est donc une partie de $\overline{A}$. Comme précédemment, il y en a 2^{n-p} .

Exercice 12 :

1. Jolimots de 1 lettre : a, b .
Jolimots de 2 lettres : ab, ba, bb .
Jolimots de 3 lettres : aba, abb, bab, bba, bbb .
Jolimots de 4 lettres : $abab, abba, abbb, baba, babb, bbab, bbba, bbbb$.
Jolimots de 5 lettres : $ababa, ababb, abbab, abbba, abbbb, babab, babba, babbb, bbaba, bbabb, bbbab, bbbba, bbbbb$.
Ainsi : $j_1 = 2, j_2 = 3, j_3 = 5, j_4 = 8$ et $j_5 = 13$.
2. L'ensemble des jolimots de longueur n commençant par b a le même cardinal que l'ensemble des jolimots de longueur $n - 1$.
En effet, on peut ajouter un b en tête de tout jolmot de longueur $n - 1$ pour obtenir un jolmot de longueur n et commençant par b ; et si on enlève la première lettre d'un jolmot de longueur n commençant par b , on obtient un jolmot de longueur $n - 1$.
L'ensemble des jolimots de longueur n et commençant par a est de même cardinal que l'ensemble des jolimots de longueur $n - 2$.
En effet, si un jolmot commence par a , sa deuxième lettre est nécessairement un b , et les $n - 2$ lettres suivantes forment un quelconque jolmot de longueur $n - 2$.
Ainsi : $\forall n > 2, j_n = j_{n-1} + j_{n-2}$.
3. On sait résoudre la relation de récurrence précédente. Son équation caractéristique $X^2 = X + 1$ est de discriminant $\Delta = 5 > 0$ et admet 2 racines réelles : $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
La formule générale d'une suite vérifiant cette relation de récurrence est donc : $A\varphi^n + B\psi^n$.

Posons $j_0 = 1$ pour respecter la relation de récurrence avec $n = 0$.

$$\text{On a alors } \begin{cases} 1 = A + B \\ 2 = A\varphi + B\psi \end{cases}$$

On résout ce système : $A = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$ et $B = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}$

$$\text{On trouve ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}, j_n = \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Application numérique, pour $n = 10$, on trouve :

$$j_{10} = \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10} = 144$$

Exercice 13 :

On considère ici que les boules blanches entre elles, ainsi que les boules noires entre elles, sont indiscernables.

1. Un tirage consiste en un ensemble de a rangs d'apparition pour les boules blanches, parmi $a + b$ rangs possibles.

Il y a donc $\binom{a+b}{a}$ tirages possibles.

2. Un tirage amenant la dernière boule blanche au rang k consiste à choisir $a - 1$ rangs parmi $k - 1$ pour placer toutes les boules blanches sauf la dernière.

Il y a donc $\binom{k-1}{a-1}$ possibilités.

3. Pour $k \in \llbracket a, n \rrbracket$, soit A_k l'ensemble des tirages pour lesquels la dernière boule blanche est de rang k .

Les A_k sont non vides, disjoints deux-à-deux et leur union forme l'ensemble de tous les tirages possibles. Ils constituent donc une **partition** de l'ensemble des tirages possibles.

$$\text{On a donc : } \binom{a+b}{a} = \sum_{k=a}^{a+b} \text{card } A_k = \sum_{k=a}^{a+b} \binom{k-1}{a-1}$$

Exercice 14 :

1. Une partie à r éléments d'un ensemble $E \cup F$ de cardinal $p + q$ est une combinaison de r parmi $p + q$: il y en a $\binom{p+q}{r}$.

Par ailleurs, pour constituer une partie de $E \cup F$, on peut choisir un nombre i d'éléments dans E ($0 \leq i \leq p$) puis compléter par $r - i$ éléments choisis dans F .

Il y a alors $\binom{p}{i} \times \binom{q}{r-i}$ choix possibles.

Ainsi le nombre de parties à r éléments de $E \cup F$ est aussi égal à

$$\sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \binom{q}{r-i}.$$

$$\text{En conclusion, on obtient donc : } \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r}$$

$$2. \text{ Posons } p = q = r = n : \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}$$

et par symétrie, $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$, donc :

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Exercice 15 :

Si les chocolats sont discernables (par exemple tous différents), il y a 3^{144} distributions possibles (chaque chocolat pouvant être donné à l'un des 3 profs).

Parmi ces distributions, 3 donnent tous les chocolats au même prof, et $3 \times 2^{144} - 6$ oublient exactement 1 prof.

Il y a alors $3^{144} - 3 \times 2^{144} + 3$ distributions dans lesquelles chaque prof reçoit au moins un chocolat.

Décidons maintenant que tous les chocolats sont identiques.

Le problème est alors de dénombrer les *partitions* de l'entier 144 en une somme ordonnée de trois entiers naturels non nuls.

Par exemple $1+1+142$, ou $1+142+1$, ou $100+40+4$.

Commençons par donner un chocolat à chaque prof. Il reste 141 chocolats à distribuer. Le premier prof va en recevoir un nombre $k \in \llbracket 0, 141 \rrbracket$.

Il reste encore $141 - k$ chocolats à distribuer entre les deux profs restants, soit $142 - k$ possibilités.

Ainsi, le nombre total de distributions convenables est :

$$\sum_{k=0}^{141} (142 - k) = \sum_{i=1}^{142} i = \frac{142 \times 143}{2} = 10153.$$

Exercice 16 :

Exercice un peu compliqué, où l'on peut raisonner par récurrence. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des permutations *sans point fixe* d'un ensemble à n éléments, c'est-à-dire l'ensemble des permutations qui changent de place tous les éléments (on parle aussi de *dérangements*), et posons D_n son cardinal. Soit une permutation de $\mathcal{D}_n$: dans cet exercice, c'est donc une situation où aucun étudiant n'a pris sa propre blouse. Appelons i la blouse prise par le premier étudiant, où $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Considérons alors 2 cas :

- 1er cas : l'étudiant i n'a pas pris la blouse 1. En renommant la blouse 1 (libre) en blouse i , on voit qu'il reste $n - 1$ étudiants et $n - 1$ blouses à prendre, soit D_{n-1} dérangements possibles.
- 2ème cas : l'étudiant i a pris la blouse 1. Il suffit alors de dénombrer le nombre de dérangements de l'ensemble des $n - 2$ étudiants restants, soit D_{n-2} .

Ainsi, et puisqu'au départ le premier étudiant a $n - 1$ choix pour la blouse i , on obtient : $\forall n > 1, D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2})$.

Cette relation de récurrence est suffisante pour calculer D_5 et résoudre l'exercice avec 5 étudiants.

Résolvons-la dans le cas général. Posons $u_n = D_n - n \times D_{n-1}$ et on a :

$u_n + u_{n-1} = D_n - n \times D_{n-1} + D_{n-1} - (n-1)D_{n-2} = D_n - (n-1)(D_{n-1} - D_{n-2}) = 0$
Ainsi $u_n = -u_{n-1}$ et $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison -1 .

$D_1 = 0$ et $D_2 = 1$ donc $u_2 = 1$. On a donc : $\forall n > 1, u_n = (-1)^n$.

Il vient donc $D_n - n \times D_{n-1} = (-1)^n$. En divisant par $n!$:

$p_n = p_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}$ où l'on a posé $p_n = \frac{D_n}{n!}$

On obtient donc $p_n = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

Multiplions par $n!$: $D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!}$ est le nombre de dérangements.

L'exercice demande le nombre de permutations où au moins un étudiant retrouve sa blouse, soit le nombre de permutations qui ne sont pas des dérangements.

Il y en a donc : $n! - D_n = n! \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$

Application numérique, pour $n = 5$, on trouve :

$120 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \right) = 120 - 60 + 20 - 5 + 1 = 76$ façons de choisir les blouses de sorte qu'au moins un étudiant retrouve la sienne.

Une autre façon, plus rapide, d'obtenir le résultat consiste à utiliser le principe d'inclusion-exclusion, qui est une généralisation de la formule connue :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B)$$

Cette formule, appelée aussi **formule de Poincaré**, énonce que :

Si $A_1 \dots A_n$ sont des ensembles quelconques, alors :

$$\text{card} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{card}(A_i) - \sum_{i \neq j} \text{card}(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} \text{card} \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)$$

Muni de cette formule, posons A_i l'ensemble des permutations pour lesquelles l'étudiant i retrouve sa blouse, et $a_i = \text{card } A_i$.

On a alors simplement, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_i = (n - 1)!$

Le but de l'exercice est alors de déterminer $\alpha_n = \text{card} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)$.

La formule de Poincaré donne :

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^n a_i - \binom{n}{2} (n-2)! + \binom{n}{3} (n-3)! + \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} 0!$$

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} (n-k)!$$

En effet, si on considère k indices $i_1 \dots i_k$ distincts, une permutation appartenant à l'intersection de tous ces A_i est une permutation où les k étudiants $i_1 \dots i_k$ retrouvent leur blouse, sans condition sur ce qu'obtiennent les autres étudiants. Il y a donc $(n - k)!$ telles permutations. Les indices distincts $i_1 \dots i_k$ constituent un sous-ensemble à k éléments de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ de tous les indices : il y a $\binom{n}{k}$ façons de les choisir.

Application numérique, pour $n = 5$, on trouve :

$$\alpha_5 = 5 \times 4! - 10 \times 3! + 10 \times 2! - 5 \times 1! + 1 \times 0!$$

$$\alpha_5 = 120 - 60 + 20 - 5 + 1 = 76$$