**Consignes générales :**
Lorsqu'on s'interroge sur une limite, on cherche d'abord à appliquer une méthode simple.
Cette recherche a-t-elle un sens (voir selon l'ensemble de définition de l'expression) ?
Est-ce une limite usuelle ?
Les règles d'opérations permettent-elles de conclure ?
Sinon, on parle de forme indéterminée, et là aussi on va du plus simple au plus compliqué :
Est-ce un résultat de croissances comparées ?
Une factorisation peut-elle lever l'indétermination ?
Un théorème de comparaison permet-il de conclure ? ...
Si on n'a toujours pas de réponse, alors on essaie de déterminer un équivalent de l'expression.

**Exercice 1** : Équivalents en 0

1. Par opérations, $a(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -4$, et $-4 \neq 0$, donc : $\boxed{a(x) \underset{0}{\sim} -4}$.

2. Par croissances comparées, $\dfrac{1}{x} \underset{0}{=} \text{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, donc par somme : $\boxed{b(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}}$.

3. Par opérations, $c(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $1 \neq 0$ donc : $\boxed{c(x) \underset{0}{\sim} 1}$.

4. Au voisinage de 0, on a $d(x) = \ln(1 + f(x))$ avec $f(x) = \cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2} \longrightarrow 0$

   donc : $\boxed{d(x) \underset{0}{\sim} f(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}}$.

---

**Exercice 2** : Équivalents en $+\infty$

1. Une fonction polynomiale est équivalente en $\pm\infty$ à son monôme dominant. Ici : $\boxed{a(x) \underset{+\infty}{\sim} 5x^3}$.

2. Par croissances comparées : $-\dfrac{1}{x^2} \underset{+\infty}{=} \text{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ donc par somme : $\boxed{b(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}}$.

3. On factorise le terme prépondérant dans la racine carrée :
   $\sqrt{4x^2 - x + 1} = \sqrt{4x^2\left(1 - \dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{4x^2}\right)} = 2x\sqrt{1 - \dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{4x^2}}$
   (observez que $\sqrt{4x^2} = 2x$ car $x \geqslant 0$ dans un voisinage de $+\infty$).
   On peut donc factoriser par $2x$, et on a : $c(x) = 2x\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{4x^2}}\right) = 2x\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{4x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$.
   Nommons $u(x) = -\dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{4x^2}$. Alors $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc : $(1 + u(x))^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}u(x) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{8x}$.
   Conclusion : $\boxed{c(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\left(\dfrac{1}{8x}\right) = \dfrac{1}{4}}$.

4. Une puissance est variable, on utilise la forme exponentielle : $d(x) = \exp\left(x\ln\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-1}\right)\right) - 1$.
   $\dfrac{x^2+2}{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc <u>on veut</u> utiliser l'équivalent en 0 de $\ln(1 + t)$.
   On pose donc $t = \dfrac{x^2+2}{x^2-1} - 1 = \dfrac{3}{x^2-1}$ et on a : $\ln\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3}{x^2-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3}{x^2}$.
   Par produit, $x\ln\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3x}{x^2} = \dfrac{3}{x}$ , donc tend vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$.

   On peut donc utiliser : $\exp(t) - 1 \underset{0}{\sim} t$, et on obtient : $\boxed{d(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3}{x}}$.

---

**Exercice 3** : Équivalent en 1

On pose $u(x) = -e + e^x$. Alors $\lim_{x\to 1} u(x) = 0$ , donc $f(x) = (1+u(x))^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{1}{\sim} \frac{1}{2}u(x)$.
Par ailleurs, $u(x) = e(e^{x-1} - 1)$ en factorisant par $e$, et $x - 1 \to 0$ donc par équivalent usuel : $u(x) \underset{1}{\sim} e(x-1)$. Conclusion : $\boxed{f(x) \underset{1}{\sim} \frac{e}{2}(x-1)}$.

Méthode générale : quand on demande un équivalent en $\alpha \in \mathbf{R}^\star$, on pose $t = x - \alpha$.
On a alors $t \to 0$, et on cherche un équivalent en 0 pour $t$.
On remplace à la fin $t$ par $x - \alpha$.

---

**Exercice 4** : Limites en 0

1. Puissance variable : $a(x) = e^{x \ln x}$.
   Par croissances comparées, $x \ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, donc par composée de limites : $\boxed{\lim_{x\to 0} a(x) = 1}$.
2. Pour tout $x \neq 0$, $-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$, donc est borné.
   Mais $x \to 0$, donc par produit d'une quantité bornée par une quantité tendant vers 0, on a : $\boxed{\lim_{x\to 0} b(x) = 0}$.
3. Par quotient d'équivalents usuels, $c(x) \underset{0}{\sim} \frac{5x}{x} = 5$, donc : $\boxed{\lim_{x\to 0} c(x) = 5}$.
4. Puissance variable : $d(x) = \dfrac{x \ln x}{\exp(x \ln x) - 1}$.
   Au dénominateur, on pose $t = x \ln x$. Par croissances comparées, $t \to 0$ donc $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$.
   Par quotient, $d(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x \ln x}{x \ln x} = 1$, donc : $\boxed{\lim_{x\to 0} d(x) = 1}$.
5. Posons $u(x) = \cos(x) - 1$. Alors $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $e^{u(x)} - 1 \underset{0}{\sim} u(x) = \cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.
   Par quotient, $e(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$, donc : $\boxed{\lim_{x\to 0} e(x) = -\dfrac{1}{2}}$.
6. Une valeur absolue ? On distingue deux cas.
   $*$ Premier cas : $x \geqslant 0$. Alors $|x| = x$ et $x - |x| = 0$. Ainsi, $f$ n'est pas définie en $x$.
   $*$ Deuxième cas : $x < 0$. Alors $|x| = -x$ et $f(x) = \dfrac{x - x}{x + x} = 0$. Conclusion : $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$.
7. Même raisonnement que pour $b(x)$ :
   $\forall x \neq 0$, $-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \leqslant 1$, donc est borné. Puisque $\sin(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a : $\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = 0}$.
8. On revient à la définition de $\tan(x)$ : $h(x) = \dfrac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \dfrac{\sin x}{\cos x} \times \dfrac{1 - \cos x}{x^3}$.
   On a : $\cos x \underset{0}{\sim} 1$, $\sin x \underset{0}{\sim} x$, et $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$,
   donc par opérations : $h(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{1} \times \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^3} = \dfrac{1}{2}$, donc : $\boxed{\lim_{x\to 0} h(x) = \dfrac{1}{2}}$.
9. $\sin x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln(1 + \sin x) \underset{0}{\sim} \sin x \underset{0}{\sim} x$.
   Pour le numérateur, on peut s'aider de la quantité conjuguée :
   $\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} = \dfrac{(\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x})(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}$.
   $\lim_{x\to 0} \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2$ donc $\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} \underset{0}{\sim} \dfrac{-2x}{2} = -x$.
   Par quotient : $i(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{-x}{x} = -1$ donc : $\boxed{\lim_{x\to 0} i(x) = -1}$.

10. Au dénominateur : $1-\cos(2x) \underset{0}{\sim} \dfrac{(2x)^2}{2} = 2x^2$.

Au numérateur, $\cos x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc on veut utiliser $\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t$.

On pose donc $1+t=\cos(x)$, soit $t=\cos(x)-1$, et on a : $\ln(\cos x) \underset{0}{\sim} \cos(x)-1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.

Par quotient : $j(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^2}{2}}{2x^2} = -\dfrac{1}{4}$. Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} j(x) = -\dfrac{1}{4}}$.

11. On a une forme indéterminée, du type « $-\infty+\infty$ ». Par croissances comparées : $\ln x \underset{0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

donc $k(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$. Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} k(x) = +\infty}$.

12. Puissance variable : $l(x) = \exp\left(\dfrac{1}{\sin x}\ln(1+\tan x)\right)$.

$\tan x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln(1+\tan x) \underset{0}{\sim} \tan x \underset{0}{\sim} x$.

Par ailleurs, $\dfrac{1}{\sin x} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$, donc par produit : $\dfrac{1}{\sin x}\ln(1+\tan x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$,

donc $\dfrac{1}{\sin x}\ln(1+\tan x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. <u>Par composée de limites</u>, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} l(x) = e^1 = e}$.

| Erreur à ne pas faire : composer l'équivalent trouvé par la fonction exponentielle. |
|---|

13. Par croissances comparées : $x\ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\sin(x\ln x) \underset{0}{\sim} x\ln x$.

Par quotient, $m(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x\ln x}{x} = \ln x$, donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} m(x) = -\infty}$.

---

**Exercice 5** : Limites en $+\infty$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{5x^3} = \dfrac{1}{5}$ par règles sur les fractions rationnelles en $\pm\infty$.

2. $\dfrac{1}{x} \to 0$ quand $x\to+\infty$, donc $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Par produit, $b(x) \underset{+\infty}{\sim} 1$, donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} b(x) = 1}$.

3. Puissance variable : $c(x) = \exp\left(x\ln(1+\frac{1}{x})\right)$. Mais $\dfrac{1}{x} \to 0$ donc $\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Par produit : $x\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{+\infty}{\sim} 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

<u>Par composée de limites,</u> $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} c(x) = e^1 = e}$.

4. $d(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^3\times x}{x-1}} - x = x\sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}} - x = x\left(\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right)$.

$\dfrac{x}{x-1} \to 1$ donc on veut appliquer l'équivalent $(1+t)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha t$. On pose alors : $1+t = \dfrac{x}{x-1}$,

donc $t = \dfrac{1}{x-1}$. Il vient : $d(x) = x\left(\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} x \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{x-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{3x} = \dfrac{1}{3}$.

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} d(x) = \dfrac{1}{3}}$.

5. $2x+7 \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(e^{3x}\right)$, donc $e^{3x}+2x+7 \underset{+\infty}{\sim} e^{3x}$. De même, $e^{-x} \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(e^x\right)$, donc $e^x + e^{-x} \underset{+\infty}{\sim} e^x$.

Par quotient, $e(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{3x}}{e^x} = e^{2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} e(x) = +\infty}$.

6. $f(x) = \sqrt{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}\right)} - x = x\left(\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} x\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{x}\right) = 1$, car $\dfrac{2}{x} \longrightarrow 0$.

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$. À noter : $\sqrt{x^2} = x$ dès que $x \geqslant 0$.

7. cos est borné, et $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par produit, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0}$.

8. $h(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x\sin x}{x} = \sin x$. Mais sin n'a pas de limite en $+\infty$.

   Conclusion : $\boxed{h \text{ n'a pas de limite en } +\infty}$.

---

**Exercice 6** : Limites diverses

Lorsqu'on cherche une limite en $\alpha \in \mathbf{R}^\star$, on peut toujours poser $t = x - \alpha$.
Il s'agit alors de chercher une limite en 0 pour $t$, ce qui permet d'utiliser si besoin les équivalents usuels.

1. On pose $t = x-1$, donc $x = t+1$ :

   $a(x) = a(t+1) = \dfrac{e^{t+1}-e}{t+1-\sqrt{t+1}} = \dfrac{e(e^t-1)}{t-(\sqrt{1+t}-1)}$ et $\sqrt{1+t}-1 \underset{0}{\sim} \dfrac{t}{2}$,

   donc : $t-(\sqrt{1+t}-1) \underset{0}{\sim} t-\dfrac{t}{2} = \dfrac{t}{2}$ (voir dans le cours le complément sur les sommes d'équivalents).

   Par ailleurs, $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$.

   Il vient, par quotients d'équivalents : $a(t+1) \underset{0}{\sim} \dfrac{et}{\frac{t}{2}} = 2e$, donc $\lim\limits_{t\to 0} a(t+1) = \boxed{\lim\limits_{x\to 1} a(x) = 2e}$.

2. On pose $t = x-1$, donc $x = t+1$ :

   $b(x) = b(t+1) = \dfrac{(t+1)^3-3(t+1)+2}{(t+1)^2-4(t+1)+3} = \dfrac{t^3+3t^2+3t+1-3t-3+2}{t^2+2t+1-4t-4+3} = \dfrac{t^3+3t^2}{t^2-2t} = \dfrac{t^2+3t}{t-2}$

   donc : $\lim\limits_{t\to 0} b(t+1) = \boxed{\lim\limits_{x\to 1} b(x) = 0}$.

   *Remarque* : on peut aussi bien factoriser par $(x-1)$ les polynômes apparaîssant au numérateur et au dénominateur, puisque $x=1$ est racine de ces polynômes.

3. On pose $t = x-2$, donc $x = t+2$ :

   $c(x) = c(t+2) = \dfrac{\ln(t+1)}{\sin t} \underset{0}{\sim} \dfrac{t}{t} = 1$, donc $\lim\limits_{t\to 0} c(t+2) = \boxed{\lim\limits_{x\to 2} c(x) = 1}$.

4. On pose $t = x - \dfrac{\pi}{4}$, donc $x = t + \dfrac{\pi}{4}$ :

   $$d(x) = \dfrac{\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{4t} = \dfrac{1}{4t}\left(\cos t\cos(\tfrac{\pi}{4}) - \sin t\sin(\tfrac{\pi}{4}) - \sin t\cos(\tfrac{\pi}{4}) - \cos t\sin(\tfrac{\pi}{4})\right)$$

   $$= \dfrac{\sqrt{2}}{8t}(-2\sin t) \underset{0}{\sim} \dfrac{-2\sqrt{2}t}{8t} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \quad \text{donc } \boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} d(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}}.$$

5. On pose $t = x - \dfrac{\pi}{2}$, donc $x = t + \dfrac{\pi}{2}$ : $e(x) = \tan\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)\tan(2t+\pi)$.

   D'une part, $\tan(2t+\pi) = \tan(2t)$ car la fonction tan est $\pi$-périodique.

   D'autre part, $\tan\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sin(t+\frac{\pi}{2})}{\cos(t+\frac{\pi}{2})} = \dfrac{\cos t}{-\sin t}$.

   On obtient : $e\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\cos(t)\tan(2t)}{\sin(t)} \underset{0}{\sim} -\dfrac{1\times 2t}{t} = -2$, donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} e(x) = -2}$.

---

**Exercice 7** : Limites à droite et à gauche en 0

1. On distingue deux cas :

   * si $x>0$, alors $1+\dfrac{1}{x} > 0$ donc $f(x) = x\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = x+1$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1}$.

   * si $-1 < x < 0$, alors $1+\dfrac{1}{x} < 0$ donc $f(x) = -x\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = -x-1$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1}$.

2. Par équivalents usuels : $g(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{\sqrt{-(-\frac{x^2}{2})}} = \dfrac{x\sqrt{2}}{|x|}$. On distingue deux cas :

   * Si $x>0$, alors $g(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{x\sqrt{2}}{x} = \sqrt{2}$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \sqrt{2}}$.

   * Si $x<0$, alors $g(x) \underset{0^-}{\sim} \dfrac{x\sqrt{2}}{-x} = -\sqrt{2}$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -\sqrt{2}}$.