Exercice 1 . Étudier la dérivabilité des fonctions d'expressions :

1) $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ 2) $g(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Exercice 2 . Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$.
3. Étudier la continuité de la fonction f'.

Exercice 3 . Soit f définie par : $f(x) = (1+x^2)^{1/x}$

1. Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbf{R}$.
2. La fonction f est-elle alors dérivable sur $\mathbf{R}$?

Exercice 4 . Déterminer le domaine de dérivabilité de f et déterminer f' dans les cas suivants :

1. $f(x) = x|x|$.
2. $f(x) = \sqrt{x^2+2x+2}$.
3. $f(x) = (\cos x)^3$.
4. $f(x) = e^{\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}$
5. $f(x) = \sqrt{\ln x}$.
6. $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$
7. $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$.
8. $f(x) = |\ln x|$.

Exercice 5 . Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur un intervalle J à déterminer.
   Que peut-on dire de f^{-1} ?
2. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbf{R},\ f'(x) = 1 - f^2(x)$.
3. En déduire que f^{-1} est dérivable sur J et déterminer $(f^{-1})'$.

Exercice 6 . Soit f la fonction définie sur $I = \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité K de f^{-1} et calculer $(f^{-1})'$.

Exercice 7 . Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on a : $\dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \operatorname{Arctan}(x) \leqslant x$.

Exercice 8 . Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^\star$ par $f(x) = \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$, puis calculer sa dérivée f'.
2. En déduire une expression simplifiée de f.

Exercice 9 . Soient f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$ et (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geqslant 0$.
2. Supposons que (u_n) converge vers ℓ. Déterminer ℓ.
3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ell|$.
   On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis.
4. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0 - \ell|$.
5. Conclure.