Exercice 1 : Primitives en vrac (pour vérifier, on peut dériver ce qu'on a trouvé)

8) On reconnaît une forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = \operatorname{Arctan} x$ donc $\boxed{\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\operatorname{Arctan} x} = \ln|\operatorname{Arctan} x| + C.}$

Attention ! Arctan s'annule en 0 donc la formule est valable sur $\mathbf{R}_-^\star$ ou sur $\mathbf{R}_+^\star$.

9) Des puissances de fonctions trigonométriques : on linéarise

Formules d'Euler : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ et $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

Donc $\sin^2 x \cos^3 x = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$ et on développe complètement (si besoin avec le binôme de Newton). On trouve :

$$\begin{aligned}
\sin^2 x \cos^3 x &= -\frac{1}{32}\left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right)\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right)\\
&= -\frac{1}{32}\left(e^{5ix} + e^{3ix} - 2e^{ix} - 2e^{-ix} + e^{-3ix} + e^{-5ix}\right)\\
&= -\frac{1}{32}\big(2\cos(5x) + 2\cos(3x) - 4\cos x\big) = -\frac{1}{16}\cos(5x) - \frac{1}{16}\cos(3x) + \frac{1}{8}\cos x
\end{aligned}$$

On peut maintenant donner les primitives :

$$\boxed{\int \sin^2(x)\cos^3(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{80}\sin(5x) - \frac{1}{48}\sin(3x) + \frac{1}{8}\sin(x) + C.}$$

3) On reconnaît une forme $\dfrac{1}{2}u'e^u$ avec $u(x) = x^2$, donc $\boxed{\displaystyle\int xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.}$

4) On reconnaît une forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln x$

donc $\boxed{\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln|\ln x| + C.}$ Formule valable sur $]0,1[$ ou sur $]1,+\infty[$.

Exercice 2 : Primitives en vrac (pour vérifier, on peut dériver ce qu'on a trouvé)

5) Par PPP, $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}x = \int 1 \times \ln(1+x^2)\mathrm{d}x = [x\ln(1+x^2)] - \int x \times \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

Ruse : $\dfrac{x^2}{1+x^2} = \dfrac{1+x^2}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$ donc $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x - \operatorname{Arctan} x + C.$

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}x = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{Arctan} x + C.}$

Exercice 3 : Obtenir des primitives par changement de variables.

2) $F_1(x) = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x + x(\ln x)^2}\mathrm{d}x$ On pose $t = \varphi(x) = \ln x$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^\star$.

$\varphi'(x) = \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$ donc $\mathrm{d}x = x\mathrm{d}t = e^t\mathrm{d}t$. On remplace : $F_1(x) = F_1\left(e^t\right) = \displaystyle\int \frac{t}{x + xt^2}\,x\mathrm{d}t.$

Il reste donc $F_1\left(e^t\right) = \displaystyle\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$

On peut intégrer à vue : $F_1\left(e^t\right) = \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)$ et en remplaçant t : $\boxed{F_1(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + \ln^2 x\right) + C.}$

3) $F_2(x) = \displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1}\,\mathrm{d}x$ On pose $t = \varphi(x) = e^x$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

$\varphi'(x) = e^x = t$ donc $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$. On remplace : $F_2(x) = F_2(\ln t) = \displaystyle\int \frac{t^2}{t+1}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int \frac{t}{t+1}\mathrm{d}t.$

Ruse : $\dfrac{t}{t+1} = \dfrac{t+1}{t+1} - \dfrac{1}{t+1} = 1 - \dfrac{1}{t+1}$ et on peut intégrer à vue :

$F_2(\ln t) = \displaystyle\int \mathrm{d}t - \int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = t - \ln|t+1|$. On remplace finalement : $\boxed{F_2(x) = e^x - \ln\left(e^x + 1\right) + C.}$

4) $F_3(x) = \displaystyle\int e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ On pose $t = \varphi(x) = \sqrt{x}$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^\star$ et

$\varphi'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2t}$ donc $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. On remplace : $F_3(x) = F_3\left(t^2\right) = \displaystyle\int e^{-t}2t\,\mathrm{d}t$.

On conclut par PPP : $F_3\left(t^2\right) = 2(-te^{-t}) - 2\displaystyle\int 1 \times (-e^{-t})\mathrm{d}t = -2te^{-t} - 2e^{-t}$.

On remplace : $\boxed{F_3(x) = -2(\sqrt{x}+1)e^{-\sqrt{x}} + C.}$

Exercice 5 : Calculs d'intégrales

4) On effectue le changement de variables (CDV) : $e^x = \varphi(x) = t$.

φ est de classe $\mathcal{C}^1$, et on a : $\varphi'(x) = \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = e^x$ donc $\mathrm{d}t = e^x\mathrm{d}x$.

Quand $x = 0$, on a $t = e^0 = 1$ et quand $x = 1$, on a $t = e^1 = e$.

Ainsi, $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x\mathrm{d}x}{1+e^{2x}} = \int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \big[\operatorname{Arctan} t\big]_1^e = \boxed{\operatorname{Arctan}(e) - \frac{\pi}{4} = I_1.}$

8) $I_5 = \displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$ par changement de variables. Posons $t = \varphi(x) = \ln x$.

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e^\pi]$ et $\varphi'(x) = \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$ donc $\mathrm{d}x = x\mathrm{d}t = e^t\mathrm{d}t$.

Quand $x = 1$, on a $t = \ln 1 = 0$ et quand $x = e^\pi$, on a $t = \ln(e^\pi) = \pi$.

Ainsi, $I_5 = \displaystyle\int_0^\pi \sin(t)e^t\mathrm{d}t$. On peut maintenant faire une double IPP :

$I_5 = \displaystyle\int_0^\pi u'v$ avec $u(t) = e^t$ et $v(t) = \sin t$, deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

$I_5 = \big[uv\big]_0^\pi - \displaystyle\int_0^\pi uv' = \big[e^t \sin t\big]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(t)e^t\mathrm{d}t = -\int_0^\pi \cos(t)e^t\mathrm{d}t$.

Par seconde IPP : $I_5 = -\big[\cos(t)e^t\big]_0^\pi + \displaystyle\int_0^\pi -\sin(t)e^t\mathrm{d}t = e^\pi + 1 - I_3$.

Donc $2I_5 = e^\pi + 1$ et $\boxed{I_5 = \dfrac{e^\pi+1}{2}.}$

Exercice 6 : Étude d'une suite d'intégrales

1) Convergence de (u_n) : $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0,1],\ x^{n+1} \leqslant x^n$ donc $\dfrac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$.

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

donc $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

Par ailleurs, $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0,1],\ \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geqslant 0$ donc par positivité de l'intégrale, $u_n \geqslant 0$.

La suite (u_n) est donc minorée par 0. Étant décroissante, $\boxed{(u_n) \text{ est convergente vers un réel } \ell \geqslant 0.}$

Remarque : on a bien fait attention à ce que les bornes de l'intégrale sont classées par ordre croissant.

2) $\ell = 0$: $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0,1],\ \sqrt{1+x^2} \geqslant 1$ donc $\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n$.

Par croissance de l'intégrale : $u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

Mais $\lim \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim u_n = 0.}$

Exercice 7 : Des limites d'intégrales

1) Une fonction g multipliée par t^n :

g est continue sur $[0,1]$ donc d'après le théorème des bornes, elle y est bornée.

Ainsi, il existe des réels m et M tels que : $\forall t \in [0,1],\ m \leqslant g(t) \leqslant M$.

On a donc : $\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in [0,1],\ mt^n \leqslant t^n g(t) \leqslant Mt^n$.

Par croissance de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 mt^n\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 Mt^n\mathrm{d}t$.

On calcule $\displaystyle\int_0^1 t^n\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. On a donc : $\forall n \in \mathbf{N},\ \dfrac{m}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n g(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{n+1}$.

D'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim \int_0^1 t^n g(t)\mathrm{d}t = 0.}$

2) Majoration avec valeurs absolues : $\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in [0,1],\ |\sin(nt)| \leqslant 1$.

De plus, $1 + t^n \geqslant 1$ donc $\left|\dfrac{1}{1+t^n}\right| \leqslant 1$. Ainsi, $\left|\dfrac{e^{-nt}}{1+t^n}\sin(nt)\right| \leqslant e^{-nt}$.

D'après l'inégalité triangulaire, $\forall n \in \mathbf{N}$, $|v_n| \leqslant \displaystyle\int_0^1 \left|\frac{e^{-nt}}{1+t^n}\sin(nt)\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 e^{-nt}\mathrm{d}t$.

On calcule cette intégrale : $\displaystyle\int_0^1 e^{-nt}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-nt}}{-n}\right]_0^1 = -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}$.

On a obtenu : $\forall n \in \mathbf{N},\ |v_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$. Le théorème des gendarmes donne : $\boxed{\lim v_n = 0.}$

Remarque : $|v_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$ *signifie* $-\dfrac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Exercice 9 : Lemme de Lebesgue.

1) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$.

Par définition, cela signifie que f est dérivable sur $[a,b]$ et que sa dérivée f' est continue sur $[a,b]$.

Puisque f' est continue sur le segment $[a,b]$, d'après le théorème des bornes, $\boxed{f' \text{ est bornée sur } [a,b].}$

2) Limite de $I_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$.

On pose $u(t) = -\dfrac{\cos(nt)}{n}$. Alors f et u sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, donc par IPP :

$$I_n = \int_a^b u'f = \big[uf\big]_a^b - \int_a^b uf' = -\frac{f(b)\cos(nb)}{n} + \frac{f(a)\cos(na)}{n} - \int_a^b \left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après la question **1)**, il existe une constante M telle que : $\forall t \in [a,b],\ |f'(t)| \leqslant M$.

Par ailleurs, $\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in \mathbf{R},\ |\cos(nt)| \leqslant 1$.

D'après l'inégalité triangulaire : $\forall n \in \mathbf{N}$,
$$\begin{aligned} |I_n| &\leqslant \left|\frac{f(b)\cos(nb)}{n}\right| + \left|\frac{f(a)\cos(na)}{n}\right| + \int_a^b \left|\frac{\cos(nt)}{n} f'(t)\right| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{n}\big(|f(b)| + |f(a)\big) + \int_a^b \frac{M}{n}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{n}\big(|f(b)| + |f(a)\big) + \frac{M(b-a)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ converge vers } 0.}$

Exercice 10 : Une fonction dont la courbe est symétrique.

1) Soit $I = \displaystyle\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$. On effectue un CDV sur I, en posant $t = a + b - x = \varphi(x)$.

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall x \in [a,b]$, $\varphi'(x) = -1$ donc $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.

On obtient : $I = \displaystyle\int_b^a (a+b-t)f(a+b-t)(-\mathrm{d}t) = \int_a^b (a+b-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ d'après la propriété de f.

Par linéarité, on a alors : $I = (a+b)\displaystyle\int_a^b f - I$ donc $2I = (a+b)\displaystyle\int_a^b f$. Conclusion : $\boxed{I = \dfrac{a+b}{2}\displaystyle\int_a^b f.}$

2) Application : on pose $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$.

Alors pour tout $x \in [0,\pi]$, $f(\pi - x) = \dfrac{\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)} = \dfrac{\sin x}{1+(-\cos x)^2} = f(x)$.

On applique alors le résultat précédent : $I = \displaystyle\int_0^\pi x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$

et on peut intégrer à vue, en reconnaissant au signe près une forme du type $\dfrac{u'}{1+u^2}$:

$I = \dfrac{\pi}{2}\big[-\operatorname{Arctan}(\cos x)\big]_0^\pi = \dfrac{\pi}{2}\big(-\operatorname{Arctan}(\cos\pi) + \operatorname{Arctan}(\cos 0)\big) = \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

Conclusion : $\boxed{I = \dfrac{\pi^2}{4}.}$

Exercice 11 : Sommes de Riemann

1) $\forall n > 0,\ u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln(n+k) - \ln(n)$

On manipule pour faire apparaître une somme de Riemann : $\ln(n) = \dfrac{n\ln n}{n} = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln n$

donc par linéarité des sommes : $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \big(\ln(n+k) - \ln(n)\big)$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{n+k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

On pose $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Alors f est continue sur $[0,1]$, donc (u_n) converge vers $\displaystyle\int_0^1 f$.

On calcule cette intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x = \big[(1+x)\ln(1+x) - (1+x)\big]_0^1 = 2\ln 2 - 1$.

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } 2\ln 2 - 1.}$

2) $\forall n > 0,\ v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n \big((n+k)^3 - (n-k)^3\big)$.   Équivalent de v_n ?

Première méthode, par calcul direct.
On utilise le binôme de Newton : $(n+k)^3 = n^3 + 3n^2k + 3nk^2 + k^3$ et $(n-k)^3 = n^3 - 3n^2k + 3nk^2 - k^3$
donc par différence : $(n+k)^3 - (n-k)^3 = 6n^2k + 2k^3$. On peut donc calculer :

$v_n = 6n^2\displaystyle\sum_{k=0}^n k + 2\sum_{k=0}^n k^3 = 6n^2\frac{n(n+1)}{2} + 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 3n^3(n+1) + \frac{1}{2}n^2(n+1)^2$.

D'une part, $3n^3(n+1) \sim 3n^4$, et d'autre part $\dfrac{1}{2}n^2(n+1)^2 \sim \dfrac{1}{2}n^4$.

Puisque $3 + \dfrac{1}{2} \neq 0$, on peut additionner : $\boxed{v_n \sim \dfrac{7}{2}n^4.}$

Deuxième méthode, avec une somme de Riemann.

On divise par n^4 : $\dfrac{v_n}{n^4} = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^n \frac{(n+k)^3 - (n-k)^3}{n^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left(\left(1+\frac{k}{n}\right)^3 - \left(1-\frac{k}{n}\right)^3\right)$.

On pose $f : x \mapsto (1+x)^3 - (1-x)^3$. Alors f est continue sur $[0,1]$ donc $\dfrac{v_n}{n^4}$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 f$,

qui vaut $\displaystyle\int_0^1 f = \left[\frac{(1+x)^4}{4} + \frac{(1-x)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{2^4}{4} - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$. Ainsi, $\dfrac{v_n}{n^4} \sim \dfrac{7}{2}$, donc $\boxed{v_n \sim \dfrac{7}{2}n^4.}$

Exercice 12 : Étude de $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x,\ p,q \in \mathbf{N}$.

1) Une relation de symétrie

Soient $p,q \in \mathbf{N}$. Dans $I(p,q)$, on effectue le CDV : $t = 1-x$. On a alors $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ et :

$I(p,q) = \displaystyle\int_1^0 (1-t)^p t^q(-\mathrm{d}t) = \int_0^1 t^q(1-t)^p\,\mathrm{d}t$ donc $\boxed{\forall p,q \in \mathbf{N},\ I(p,q) = I(q,p).}$

2) Utilisation d'une IPP

Soient $p,q \in \mathbf{N}$. On pose $u(x) = -\dfrac{(1-x)^{q+1}}{q+1}$ et $v(x) = x^{p+1}$.

Alors u, v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, $u'(x) = (1-x)^q$, $\quad v'(x) = (p+1)x^p$ et :

$I(p+1,q) = \displaystyle\int_0^1 u'v = \big[uv\big]_0^1 - \int_0^1 uv' = -\int_0^1 -\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}(p+1)x^p\,\mathrm{d}x$

donc $\boxed{\forall p, q \in \mathbf{N},\ I(p+1,q) = \dfrac{p+1}{q+1}\,I(p,q+1).}$

3) Expression de $I(p,q)$ par récurrence

$*$ Calcul de $I(0,q) = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^{q+1}\mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\right]_0^1 = \frac{1}{q+1}.$

$*$ Récurrence : pour $p \in \mathbf{N}$, on pose $\mathcal{P}_p$: « $\forall q \in \mathbf{N},\ I(p,q) = \dfrac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$ ».

• Initialisation pour $p = 0$: $\forall q \in \mathbf{N}$, $I(0,q) = \dfrac{1}{q+1} = \dfrac{0!\,q!}{(q+1)!}$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• Hérédité à partir de $p = 0$:

Soit $p \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{P}_p$ vraie. Alors, pour tout entier naturel q :

$I(p+1,q) = \dfrac{p+1}{q+1}\,I(p,q+1)$ d'après la question précédente,

$\quad = \dfrac{p+1}{q+1} \times \dfrac{p!\,(q+1)!}{(p+q+2)!}$ d'après $\mathcal{P}_p$,

$\quad = \dfrac{(p+1)!\,q!}{((p+1)+q+1)!}$ donc $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie.

• Conclusion d'après le principe de récurrence : $\forall p \in \mathbf{N},\ \mathcal{P}_p$ est vraie.

Ainsi : $\boxed{\forall p, q \in \mathbf{N},\ I(p,q) = \dfrac{p!\,q!}{(p+q+1)!}.}$

$I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x}\cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\ln x\,\mathrm{d}x.$ On pose $u = \dfrac{1}{x} = \varphi(x)$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$ et

$\varphi'(x) = -\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ donc $\mathrm{d}x = -x^2\mathrm{d}u = -\dfrac{1}{u^2}\mathrm{d}u$. Il faut tenir compte ici des bornes d'intégration :

Quand $x = \dfrac{1}{2}$, on a $u = 2$, et quand $x = 2$, on a $u = \dfrac{1}{2}$. On peut alors remplacer :

$I = \displaystyle\int_2^{\frac{1}{2}} u\cos\left(\frac{\frac{1}{u}}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}\right)\ln\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u\right) = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{u}\cos\left(\frac{u}{u^2+1}\right)(-\ln u)\,\mathrm{d}u = -I.$

On a montré que $I = -I$. Ainsi, $\boxed{I = 0.}$

Remarque : on a réussi à calculer l'intégrale sans connaître de primitive de la fonction à intégrer.