DS n°7, mathématique

Durée : 3 heures
Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation.
L'usage des calculatrices est interdit.

Exercice 1 : Analyse

On définit la fonction f par son expression : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f, et étudier sa parité.
2. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de f.
   Que peut-on en déduire pour sa représentation graphique ?
3. Déterminer la limite en 0 de f.
   En déduire que la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
   est un prolongement continu de la fonction f sur $\mathbf{R}$.

Dans toute la suite, on note f cette fonction $\tilde{f}$.

4. Expliquer rapidement pourquoi, si $x \neq 0$, f est dérivable en x,
   et donner l'expression du nombre dérivé $f'(x)$.
5. On admet que : $\sin(h) - h \underset{0}{\sim} -\dfrac{h^3}{6}$.
   Montrer que f est dérivable en 0, et que $f'(0) = 0$.
6. Résoudre dans $[-2\pi, 2\pi]$ l'équation $f(x) = 0$.
   En déduire que f' possède au moins 3 racines dans l'intervalle $]-2\pi, 2\pi[$.
7. Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$.
   Dresser le tableau de variations complet de la fonction g sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
8. Montrer que g possède exactement deux racines dans $[0, 2\pi]$, dont l'une est nulle.
   On notera α l'autre racine.
9. En déduire le tableau de variations de f sur $[0, 2\pi]$.
10. Montrer que $\alpha \in \left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.
11. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, 2\pi]$.
    On donne : $\alpha \approx 4,5$

Exercice 2 : Variables aléatoires

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit a un réel strictement positif.
Une urne contient n boules, dont l'une est noire, et toutes les autres sont blanches.
Un jeu consiste à :

- Lancer un dé à 6 faces, bien équilibré ;
- noter X le résultat du dé ;
- piocher successivement et avec remise X boules de l'urne ;
- noter Y le nombre de fois où la boule noire a été piochée.

On gagne 1 euro pour chaque boule noire piochée s'il y en a (si $Y \geqslant 1$), et on perd a euros sinon (si $Y = 0$).

1. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X.
   Préciser son espérance, et sa variance.
2. Donner le support (l'univers image) de la variable aléatoire Y.
3. Soit $i \in [\![1, 6]\!]$. On suppose que l'événement $[X = i]$ est réalisé.
   Quelle loi usuelle suit alors la variable aléatoire Y ?
   Préciser ses paramètres en fonction de n et de i.
4. Montrer que, pour tout $j \in Y(\Omega)$, $j \neq 0$:
   $\mathbf{P}(Y = j) = \dfrac{1}{6} \displaystyle\sum_{i=j}^{6} \binom{i}{j} p^j (1-p)^{i-j}$ où p est un réel qu'on exprimera en fonction de n.
5. Exprimer en fonction de n l'espérance de la variable aléatoire Y.
6. On note G le gain algébrique à l'issue de ce jeu :
   $$\begin{cases} G = Y & \text{si } Y \geqslant 1 \\ G = -a & \text{si } Y = 0 \end{cases}$$
   Montrer que : $\mathbf{E}(G) = \mathbf{E}(Y) - a\mathbf{P}(Y = 0)$.
7. En déduire que : $\mathbf{E}(G) = \dfrac{7}{2n} - \dfrac{a(n-1)}{6} \times \left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^6\right)$.
8. Exprimer en fonction de n la valeur a_n que doit prendre a pour que le jeu soit équilibré (de gain moyen nul).
   Déterminer un équivalent de a_n quand $n \to +\infty$.
9. **Simulation informatique**
   (a) Écrire une fonction `X()` renvoyant le résultat d'un dé.
   (b) Écrire une fonction `urne(n)` renvoyant une liste de longueur n contenant l'entier 1 suivi de $(n-1)$ fois l'entier 0.
   (c) Écrire une fonction `Y(n)` renvoyant une simulation de la valeur de Y.
   (d) En déduire une fonction `gain(n,a)` renvoyant une simulation du gain algébrique du jeu :
   Y euros si $Y \geqslant 1$, $-a$ euros si $Y = 0$.
   (e) Écrire une fonction `gainMoyen(n,a,N)` donnant une estimation du gain moyen de ce jeu, en fonction de n et a, calculée après N simulations.

Exercice 3 : Suite d'intégrales

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+\sin x}\, dx.$$

1. Justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.
3. Montrer que : $\forall x \in [0,1], \quad \dfrac{x^n}{2} \leq \dfrac{x^n}{1+\sin x} \leq x^n$.
4. En déduire un encadrement de I_n.
5. Étudier la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.
6. On pose :

$$J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}\cos(x)}{(1+\sin x)^2}\, dx.$$

   Grâce à une intégration par parties, montrer que :

$$I_n = \frac{1}{(n+1)(1+\sin 1)} + \frac{1}{n+1} J_n.$$

7. Montrer que : $|J_n| \leq I_{n+1}$.
8. En déduire que : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$ en précisant la valeur de la constante λ.

Exercice 4 : Une primitive délicate

Le but de cet exercice est de déterminer une primitive sur $\mathbf{R}_+^\star$ de la fonction $f : x \longmapsto \sin(\ln x)$.

1. Justifier que f admet des primitives sur $\mathbf{R}_+^\star$.
   Si F est une primitive de f sur $\mathbf{R}_+^\star$, comment obtient-on l'ensemble des primitives de f sur $\mathbf{R}_+^\star$?
2. On pose : $g(t) = \sin(t)e^t$.
   Déterminer une primitive de la fonction g.
   On pourra procéder par double primitivation par parties.
3. En effectuant le changement de variables : $t = \ln(x)$, montrer que : $\mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t$
   puis déterminer une primitive F de la fonction f.