

Programme de colles
Semaine 29 du 10/06 au 13/06/2025

Pour les équations différentielles, c'est le début. Le TD a été traité jusqu'à l'exercice 5

Chapitre 23 : Applications linéaires de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^p$

1. Application linéaire : $E = \mathbf{K}^n \longrightarrow F = \mathbf{K}^p$. Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.
2. Caractérisation : $f \in \mathcal{L}(E, F) \Leftrightarrow \forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbf{K}, f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.
3. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition.
4. Noyau et image d'une application linéaire. Étude de dimension, détermination de bases.
5. Caractérisation de l'injectivité ou de la surjectivité à l'aide du noyau ou de l'image.
6. Action d'une application linéaire sur une base.
7. Caractérisation de l'injectivité ou de la surjectivité à l'aide de l'image d'une base.
8. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang.
Équivalence entre injectivité et surjectivité lorsque $\dim(E) = \dim(F)$.
9. Matrice d'une application linéaire relativement à des bases, application linéaire canoniquement associée à une matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$.
10. Correspondance entre les opérations sur les applications linéaires et les opérations matricielles.
11. Formules de changement de bases.

Chapitre 24 : Équations différentielles

1. Equation fonctionnelle, équation différentielle (ED), Ordre d'une ED, ensemble-solution
2. Équations différentielles linéaires (EDL), Définition, EDL homogène (EDLH), Structure de l'ensemble-solution, Principe de superposition
3. EDL d'ordre 1, Forme dite "résolue", Résolution de l'EDLH associée, Méthode de variation de la constante (MVC), Théorème de Cauchy
4. EDL d'ordre 2 à coefficients constants, Résolution de l'EDLH associée, Résolution de $(E) : ay'' + by' + cy = d(t)$

Liste des questions de cours :

1. Donner la caractérisation d'une application linéaire. Que dire alors de l'image du vecteur nul ?
2. Définir le noyau d'une application linéaire. Que dire s'il ne contient que le vecteur nul ?
3. Définir l'image $\text{Im}(f)$ d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$. Que dire si $\text{Im}(f) = F$?
4. Définir le rang d'une application linéaire. Énoncer le théorème du rang.
5. Écriture matricielle de $f(u) = v$, où $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Définir précisément les matrices utilisées.
6. Relation matricielle entre A, A' et P lorsque les matrices A et A' représentent un même endomorphisme f relativement à des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, avec P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
7. Théorème de structure
8. Solutions d'une EDLH₁
9. Théorème de Cauchy "linéaire"
10. Résolution de l'EDLH₂ : $ay'' + by' + cy = 0$, avec a, b, c réels fixés, $a \neq 0$.

Informatique (en langage *Python*) :

1. Déclaration d'une variable : affectation (=)
2. Importations à partir du module `math`.
3. Syntaxe de définition d'une fonction.
4. Boucle `for` ou `while`. Applications aux calculs de sommes ou de produits.
5. Booléens `True`, `False`, comparaisons (`==`, `!=`, `>`, `>=`, `<`, `<=`), tests.
6. Listes, chaînes de caractères et tuples. Indexation, extraction, concaténation.
7. Modules `matplotlib.pyplot` (`plt`) et `numpy` (`np`) : représentations graphiques.

8. Fonctions récursives : cas de base, appel récursif.
9. Simulation du hasard : le module `random` (`rd`).
10. Algorithme de dichotomie (corollaire 1 du TVI).
11. Calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b]$ par la "méthode des rectangles".

Mots clés à connaître : `from import as def return for while if elif else`

Fonctions à connaître : `range len append np.linspace plt.plot plt.show rd.random rd.randint rd.choice`

Bon courage à tous !