

TD 22: Matrices et déterminants.

1 Matrice d'une application

Exercice 1.

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Déterminer la matrice A de $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $3e_1 + e_2 - e_3 \in \text{Ker}(f)$, $f(e_1) = 2e_1 + e_3$ et $f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3$.

Exercice 2.

Déterminer la matrice de $g : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $P \mapsto P'(X+1)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 3.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto (X+1)P'(X-1) - P(X+2) \end{cases}$

- Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
- Déterminer la matrice de f dans la base $B' = (X-1, -X^2+4X+1, 1)$.
- Déterminer la matrice de f dans la base $B'' = (X-1, -X^2+4X+1, X^2-2X)$.

Exercice 4.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- Donner une expression de l'application f canoniquement associée à A .
- Donner une expression de $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_2[X])$ telle que $A = \text{Mat}_B(g)$ où B désigne la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Donner une expression de $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$ telle que $A = \text{Mat}_{BC}(h)$ où C désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = A^5$. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

- Montrer que $\text{Ker}(f^4)$ et $\text{Im}(f^4)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

- Montrer que A est non inversible ou égale à I_n .

Exercice 6.

Soit F, G deux espaces supplémentaires d'un espace vectoriel E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note C une base adaptée à la somme directe $F \oplus G = E$ (obtenue comme la concaténation d'une base de F et d'une base de G). On note $n = \dim(E)$, $p = \dim(F)$ et $r = \dim(G)$ (on a donc $p+r=n$). On découpe la matrice ainsi $\text{Mat}_C(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $A \in M_p(\mathbb{R})$, $B \in M_{pr}(\mathbb{R})$, $C \in M_{rp}(\mathbb{R})$ et $D \in M_{rr}(\mathbb{R})$.

- Si $B = (0)$ et $C = (0)$, que dire de $u(F)$ et $u(G)$?
- Si $A = (0)$ et $D = (0)$, que dire de $u(F)$ et $u(G)$?
- Si $C = (0)$ et $D = (0)$, que dire de $\text{Im}(u)$?

2 Détermination du noyau et de l'image

Exercice 7.

- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ représentée par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base $B = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
- Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ représentée par la matrice A dans la base $C = ((X-1)^2, (X+1)^2, X^2-1)$. Déterminer $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.

Exercice 8.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$ tel que $\text{Mat}_{BC}(u) = A$ avec $B = ((X-1)^2, (X+1)^2, X^2-1)$ et $C = ((1, 2, 3), (1, 2, 0), (1, 0, 0))$.

- Déterminer $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.
- Calculer l'image de $3X^2 - 2X - 1$ par u .
- La matrice A est-elle inversible ?
- Soit $B' = (X^2-1, 4, 2X^2+2X+4)$. Déterminer $\text{Mat}_{B'C}(u)$.

Exercice 9.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$. On note $f \in (E)$ tel que $\text{Mat}_B(f) = A$ où E

est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 4 et $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E .

1. Déterminer le rang de A suivant la valeur de α .
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

3 Matrice d'une application dans une base adaptée**Exercice 10.**

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On note u son endomorphisme canoniquement associé.

1. Déterminer les réels λ tels que $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}) \neq \{(0, 0, 0)\}$.
2. Déterminer une base de chacun des noyaux non réduits à zéro.
3. Montrer que $\text{Ker}(u - \text{id}) \oplus \text{Ker}(u - 4\text{id}) = \mathbb{R}^3$.
4. En déduire qu'il existe une matrice Q que l'on précisera, telle que :

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. La matrice A est-elle inversible?

Exercice 11.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Supposons $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrez que si $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$, alors la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre.
2. Montrer l'équivalence :

$$f^n = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \exists B \text{ base de } E, \text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

4 Déterminants**Exercice 12.**

Soit $E = \text{Vect}((1, 1, 3), (1, -1, 1))$. Écrivez E sous forme d'un ensemble d'éléments satisfaisant une ou plusieurs équations.

Exercice 13.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & a \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la matrice A est inversible.

Exercice 14.

La famille $((2, 1, 0), (1, 3, 1), (5, 2, 1))$ est-elle libre ?

Exercice 15.

Pour quelles valeurs de m la matrice : $\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$ est-elle de rang

strictement inférieur à 4?

Exercice 16.

Soit $M = \begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix}$. Calculer $\det(M)$ et en déduire une con-

dition nécessaire et suffisante d'inversibilité pour M .

Exercice 17.

Pour $n \geq 2$, on considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ t.q. pour toute matrice M , on ait : $\det(A + M) = \det(A) + \det(M)$. Montrer que A est la matrice nulle.

Exercice 18.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et on note u l'endomorphisme canoniquement associé à M .

1. Calculer le déterminant de $M - \lambda I_3$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. En déduire les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\text{Ker}(M - \lambda I_3)$ n'est pas réduit à zéro et donner une base de ces noyaux.
3. Montrer que ces noyaux sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de u dans une base adaptée à la somme directe.
4. En déduire une matrice P inversible telle que $M = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale que l'on précisera.

5 Si besoin d'encore un peu d'entraînement

Exercice 19.

Déterminer la matrice de $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + y, x - z)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20.

On considère les sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ suivants $F = \text{Vect}(w)$ avec $w = (1, 0, -1)$ et $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\}$. On note p la projection vectorielle sur E parallèlement à F , q la projection vectorielle sur F parallèlement à E et s la symétrie vectorielle d'axe E et parallèlement à F .

1. Écrire la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire la matrice de q et de s dans la base canonique.
3. Donner l'image des vecteurs $(1, 2, 3)$ et $(1, 1, 1)$ par p et s .

Exercice 21.

Déterminer la matrice de $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3, P \mapsto (P(1), P(2), P(3))$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 22.

Soit M_a la matrice de $\varphi_a : \begin{cases} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+a) \end{cases}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Écrire M_a et calculer son inverse.

Exercice 23.

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

On pose $\epsilon_1 = (1, 1, 1)$, $\epsilon_2 = (1, -1, 0)$ et $\epsilon_3 = (1, 0, 1)$.

1. Montrer que la famille $B' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de f dans la base B' .
3. Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.

Exercice 24.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $f \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à A .

Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 25.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

1. Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.
2. Montrer que ces deux espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire la matrice de f dans une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à cette somme directe.

Exercice 26.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

1. On pose $\epsilon_1 = e_1 + e_3$, $\epsilon_2 = e_1 + e_2$ et $\epsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que $B' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base de E et déterminer $\text{Mat}_{B'}(f)$.
2. Calculer $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

6 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 27. ✨

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer B telle que $BA = I_2$. Peut-on trouver $B' \neq B$ telle que $B'A = I_2$?

Exercice 28.

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Montrer que $AB \notin \text{GL}_3\mathbb{R}$.

Exercice 29. ✨ ✨

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{L}(E)$ admet une base formée de projecteurs de E .

Exercice 30.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer

qu'il existe une base B de E telle que :

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 31. [CCP]

Soit $(r_1, \dots, r_n, a, b) \in \mathbb{C}^{n+2}$ avec $a \neq b$.

1. Montrer que $P(x) = \begin{vmatrix} r_1 + x & b + x & \dots & b + x \\ a + x & r_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b + x \\ a + x & \dots & a + x & r_n + x \end{vmatrix}$ est un polynôme de degré au plus 1

2. Calculer $P(-a)$ et $P(-b)$

3. Expliciter $P(x)$, en déduire $\Delta_1 = \begin{vmatrix} r_1 & b & \dots & b \\ a & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & r_n \end{vmatrix}$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & b & \dots & b \\ a & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & 0 \end{vmatrix}$

4. Comment déterminer $P(x)$ si $a = b$?

Exercice 32.

On s'intéresse au déterminant suivant avec $x_i + y_j \neq 0$ pour tout i, j : ("de Cauchy")

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 + y_1} & \frac{1}{x_1 + y_2} & \dots & \frac{1}{x_1 + y_n} \\ \frac{1}{x_2 + y_1} & \frac{1}{x_2 + y_2} & \dots & \frac{1}{x_2 + y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n + y_1} & \frac{1}{x_n + y_2} & \dots & \frac{1}{x_n + y_n} \end{vmatrix}.$$

1. Que se passe-t-il si $x_i = x_j$ pour $i \neq j$?

2. Pour $x_i \neq x_j$, écrire $\frac{\prod_{j=1}^{n-1} (X - y_j)}{\prod_{i=1}^n (X + x_i)}$ sous la forme $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{X + x_i}$

3. En déduire la valeur du déterminant.

Memo

- Comment déterminer le noyau d'une application grâce à sa matrice?
Calculer le noyau de la matrice et "traduire" à l'aide des coordonnées.
- Comment déterminer l'image d'une application linéaire grâce à sa matrice?
Calculer l'image de la matrice et "traduire" à l'aide des coordonnées.
- Comment déterminer la matrice d'une application linéaire?
Appliquer la définition : Déterminer les coordonnées, dans la base d'arrivée, des images des vecteurs de la base de départ.
- Comment déterminer si une matrice est inversible?
 - observer ses lignes et ses colonnes
 - Déterminer si le système associé possède une unique solution
 - Calculer son noyau
 - Calculer son déterminant
 - Étudier la bijectivité d'une application qu'elle représente
- Comment calculer l'inverse d'une matrice?
 - Résoudre le système $AX = Y$
 - Faire des opérations élémentaires sur les lignes
 - Trouver son inverse
 - Trouver l'inverse d'une application qu'elle représente et déterminer la matrice de cette application dans les bonnes bases.
- Comment calculer un déterminant?
 - Faire des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes
 - Faire apparaître une relation de récurrence