Lycée du Parc
PCSI 842
DS 3

Année 2025-2026
Durée : 4h

Devoir surveillé 3.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1. On considère la fonction f définie par la relation $f(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}$.

1. (a) Sur quel intervalle la fonction f est-elle définie ?
   (b) Déterminer un DL en $\underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x\sqrt{x})$ de $f(x)$ en 0.
   (c) Donner un équivalent en 0 de f.
   (d) Déterminer la limite en 0^+ de $\dfrac{f(x)}{x}$.
   (e) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Que peut-on dire de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 ?
   (f) Dresser le tableau de variation de f .
   (g) Tracer l'allure du graphe de f. On fera apparaître les tangentes connues.
2. (a) Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[0,1]$ vers l'intervalle $[0,\frac{1}{\sqrt{e}}]$. On note φ l'application réciproque correspondante.
   (b) Dresser le tableau de variation de φ.
   (c) Justifier que φ est dérivable sur $\left]0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$.
   (d) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)}{x} = 0$.
   (e) Déterminer un équivalent de φ en 0.
3. (a) Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ vers l'intervalle $\left]0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$. On note ψ la bijection réciproque correspondante.
   (b) Dresser le tableau de variation de ψ. On déterminera les limites de ψ aux bornes.
   (c) Déterminer un équivalent simple de ψ au voisinage de 0. On ne cherchera pas à déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
   Indication : On pourra utiliser le fait que $\forall x \in \left]0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$, $f(\psi(x)) = x$.
   (d) On considère l'application composée $g = \varphi\circ\psi^{-1}$ définie de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de variation de g.
   (e) Étant donné x dans l'ensemble de départ de g, expliquer comment construire graphiquement $g(x)$ en utilisant uniquement le graphe de f.

Exercice 2. On considère les fonctions définies par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right) \end{array} \right. \quad \text{et } a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2\sqrt{x}}{x+1} \end{array} \right. .$$

1. Déterminer le domaine de dérivabilité de a.
2. Dresser le tableau de variations de a.
3. Quelles sont les solutions de $a(x) = 1$?
4. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer son domaine de dérivabilité.
5. Calculer la dérivée de f. On donnera une expression simplifiée de $f'(x)$.
   On pourra distinguer $x > 1$ et $x < 1$.
6. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \arctan(\sqrt{x})$.
7. Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $\arctan\sqrt{x} \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
8. Redémontrer que $\forall x \in [0,1]$, $\arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = 2\arctan(\sqrt{x})$ en raisonnant par équivalence.
9. Déterminer, avec la méthode de votre choix, une expression simplifiée analogue pour $f(x)$ lorsque $x > 1$.

Exercice 3. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \arcsin(3x) - \arccos(2x)$

1. (a) Soit $x \in [-1,1]$, simplifier $\sin\arccos(x)$ et $\cos(\arcsin(x))$ en justifiant rigoureusement.
   (b) Donner, sans démonstration, la relation entre arccos et arcsin.
2. Déterminer l'intervalle de définition I de f.
3. Dresser le tableau de variations de f.
   On exprimera les valeurs aux bornes uniquement à l'aide de arcsin.
4. Montrer que f induit une bijection notée g entre deux intervalles que l'on précisera.
5. Pour tout $x \in I$, calculer et simplifier $\sin\big(f(x)\big)$.
6. Montrer que si $f(x) = t$ alors $x = \pm\dfrac{\cos(t)}{\sqrt{13 - 12\sin(t)}}$
7. En déduire une expression de g^{-1}.

Exercice 4. Dans tout ce problème, on cherche à déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+^\star$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$ vérifiant les deux propriétés suivantes :
(P_1) $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, f(xf(y)) = yf(x)$
(P_2) f est bornée sur $[1,+\infty[$: $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geqslant 1, f(x) \leqslant A$.

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et g une application de I dans I. On dit que g est une involution de I si $\forall x \in I, g \circ g(x) = x$.
   (a) Donner deux exemples d'involution sur $]0,+\infty[$.
   (b) Une involution de I est-elle bijective sur I ?
2. Soit f une fonction définie de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ vérifiant (P_1) et (P_2).
   (a) i. Soit $(y,z) \in]0,+\infty[^2$ tel que $f(y) = f(z)$. Démontrer que $yf(1) = zf(1)$.
      ii. Démontrer que $f(1) = 1$.
      On pourra utiliser la question précédente.
      iii. En déduire que f est une involution de $]0,+\infty[$.
   (b) Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$, montrer que $f(ab) = f(a)f(b)$.
   On pourra commencer par justifier l'existence de $y \in]0,+\infty[$ tel que $f(y) = b$.
   (c) On note $F = \{x > 0, f(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de f.
      i. Démontrer que pour tout $x > 0$, $xf(x) \in F$.
      ii. Montrer que si $(x,y) \in F^2$, alors $xy \in F$ et $\frac{1}{x} \in F$.
      iii. Soit $x \in F$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n \in F$.
      iv. Montrer que si $x \in F$, alors $x \leqslant 1$.
      On pourra utiliser la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$
      v. Montrer que $F = \{1\}$.
   (d) Déterminer toutes les fonctions définies de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ vérifiant (P_1) et (P_2).

Correction du DS n 3

Correction 1 *C'est valable pour tout le devoir : $f(x)$ n'est pas une fonction!! On évite de dire f est définie/dérivable pour $x \in I$ (qu'est-ce que x ?). On dit plutôt qu'elle est définie/dérivable sur I*

1. (a) La fonction est définie sur $\mathbb{R}^+$.

   (b) Avec les DL usuels, on a $f(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)\right) = \sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x\sqrt{x})$.

   Attention à ceux qui m'écrivent $e^{-x/2} \sim_{x\to 0} 1 - \frac{x}{2}$ (ce qui est vrai) et passe ensuite à $f(x) = \sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x\sqrt{x})$. Pour rappel $e^{-x/2} \sim_{x\to 0} 1 - \frac{x}{2}$ implique $e^{-x/2} = 1 - \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1) = 1 + o(1)$ et pas le DL1 que vous aimeriez! Pour vous en convaincre, rappelez-vous que l'on a aussi $e^{-x/2} \sim_{x\to 0} 1 + \frac{x}{2}$.

   (c) On a $f(x) \sim_{x\to 0} \sqrt{x}$.

   (d) On a
   $$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \text{ donc } \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

   (e) D'après la question précédente, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$. On en déduit que f n'est pas dérivable en 0 et que sa tangente, au point d'abscisse 0, est verticale.

   Certains m'ont dit que f n'était pas dérivable en 0 " car racine carrée n'est pas dérivable en 0". Cet argument est faux car $x \mapsto x\sqrt{x}$ est dérivable en 0 (calculez la limite de son taux d'accroissement!). Certains me parlent d'asymptote verticale. Pour rappel, l'asymptote est une droite vers laquelle le graphe tend (quand x tend vers une borne de son ensemble de définition.)
   Certains me justifient la non-dérivabilité en calculant l'expression de la dérivée : C'est faux. La définition de la dérivabilité est donnée à l'aide du taux d'accroissement. L'expression de la dérivée peut simplement vous permettre de constater que vous avez bien identifié les points problématiques.

   (f) On a f dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{(1-x)e^{-\frac{x}{2}}}{2\sqrt{x}}$. Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $1 - x$.
   On calcule la limite en $+\infty$, on a :
   $$f(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}} = \left(xe^{-x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$
   Par le théorème de croissances comparées, on a $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   On peut aussi écrire
   $$f(x) = \sqrt{2}\sqrt{\frac{x}{2}}e^{-x/2} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x}{2}}e^{-x/2} = 0,$$
   par le théorème de croissances comparées.
   Remarque : Il est impératif de justifier la limite en $+\infty$ puisque c'est une forme indéterminée. Préciser simplement "par le théorème de croissances comparées" sans faire apparaître la "bonne" forme est insuffisant à ce stade de l'année.

   On a le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

2. (a) La fonction f est strictement croissante sur $[0,1]$ donc injective. On a $f([0,1]) = \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$ donc f induit une bijection de $[0,1]$ vers $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$ (ou bien $f|_{[0,1]}^{]0,\frac{1}{\sqrt{e}}[}$ est bijective).

   J'ai vu beaucoup de Im([..]) = .. ce qui n'a absolument aucun sens! Vous avez visiblement fait un mix entre $f([0,1])$ et Im(f) (ou ici Im($f|_{[0,1]}$)). On en est au troisième DS et deuxième DS. Si vous m'avez encore écrit n'importe quoi pour justifier l'existence d'une bijection induite, notamment en me donnant les arguments en vrac ou dans le désordre, je ne vais pas perdre mon temps et mon énergie à vous le réexpliquer à nouveau. Lisez les (25) exemples déjà traités ensemble.

   (b) f est croissante sur $[0,1]$ donc φ l'est aussi.

   Attention à ne pas parler de f^{-1}, f n'est PAS bijective!!

   On a $f(0) = 0$ donc $\varphi(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ donc $\varphi\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = 1$. On en déduit le tableau de variations de φ :

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$
φ	0	$\nearrow$	1

   Vous devez avoir remarqué maintenant qu'on ne balance jamais un résultat sans le justifier, c'est valable aussi pour un tableau de variations.

   (c) La fonction f est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1[$, $f'(x) \neq 0$ donc φ est dérivable sur

$$\left\{x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right], \varphi(x) \in]0,1[\right\} = \left]0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right[,$$

   car $f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

   Attention à ne pas seulement me dire que la dérivée ne doit pas s'annuler! On évite aussi de me dire que f' n'est pas définie sur ... mais plutôt que f n'est pas dérivable sur ...

   (d) On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{f\circ\varphi(x)}.$$

   On pose $y = \varphi(x)$, on a $\lim\limits_{x\to 0} y = 0$ car φ est continue et $\varphi(0) = 0$. On a donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{f\circ\varphi(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{f(y)} = 0,$$

   car $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(y)}{y} = +\infty$ d'après la question 1a).

On a donc bien $\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0$.

(e) On sait que $\lim_{y\to 0} \frac{f(y)}{\sqrt{y}} = 1$ donc $\lim_{y\to 0} \frac{\left(f(y)\right)^2}{y} = 1$. On a $f(0) = 0$ donc $\varphi(0) = 0$. Par continuité de φ, on a donc $\varphi(x) \to 0$ quand $x \to 0$. On pose donc $y = \varphi(x)$.
On obtient $\lim_{x\to 0} \frac{\left(f\circ\varphi(x)\right)^2}{\varphi(x)} = 1$ d'où, après simplification $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\varphi(x)} = 1$.
On en déduit que $\varphi(x) \underset{0}{\sim} x^2$.

3. (a) La fonction f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ donc injective et $f([1,+\infty[) = \left]0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ donc f induit une bijection de $[1,+\infty[$ vers $\left]0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$.

(b) La fonction f est décroissante sur $[1,+\infty[$ donc ψ l'est aussi. On a $f(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ donc $\psi\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 1$.
La fonction ψ admet une limite en 0 car elle est monotone, et $\lim_{y\to+\infty} f(y) = 0$, on a donc :

$$\lim_{x\to 0} \psi(x) = \lim_{y\to+\infty} \psi\circ f(y) = \lim_{y\to+\infty} y = +\infty.$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
ψ	$+\infty$ $\searrow$	1

(c) Pour tout $x \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$, on a $\sqrt{\psi(x)}e^{-\frac{\psi(x)}{2}} = x$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\psi(x)}e^{-\frac{\psi(x)}{2}} = x \quad & \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\psi(x) - \frac{\psi(x)}{2} = \ln(x) \\
& \Leftrightarrow \psi(x) - \ln(\psi(x)) = -2\ln(x) \\
& \Leftrightarrow 1 - \frac{\ln(\psi(x))}{\psi(x)} = -\frac{2\ln(x)}{\psi(x)}
\end{aligned}$$

On sait que $\lim_{x\to 0} \psi(x) = +\infty$ (car $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$). On en déduit, par le théorème de croissances comparées, que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\psi(x))}{\psi(x)} = 0$$

donc $\lim_{x\to 0} -\frac{2\ln(x)}{\psi(x)} = 1$. Ainsi, $\psi(x) \underset{0}{\sim} -2\ln(x)$.

(d) La fonction φ est croissante, ψ est décroissante donc ψ^{-1} aussi, la composée $\varphi\circ\psi^{-1}$ est donc décroissante. Elle est définie sur $[1,+\infty[$.
On a :

$$\varphi\circ\psi^{-1}(1) = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 1,$$

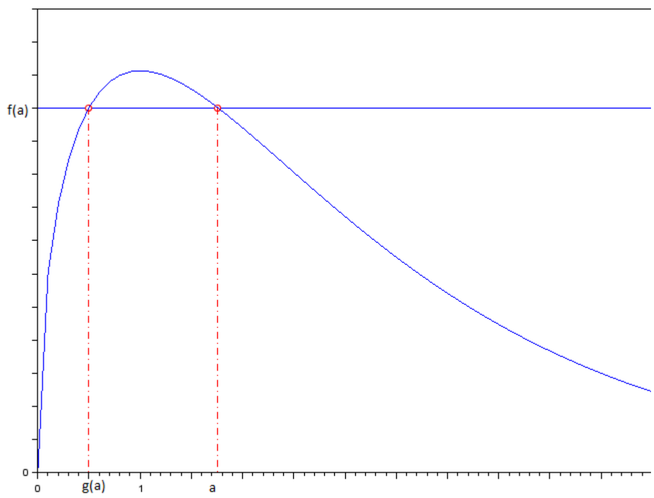
et

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi\circ\psi^{-1}(x) = \varphi(0) = 0,$$

d'où le tableau de variations suivant :

x	1	$+\infty$
g	1 ↘	0

(e) Soit $a \in [1, +\infty[$. Si $a = 1$, $g(1) = 1$. On suppose donc $a \neq 1$. On se place sur l'axe des abscisses, la droite $x = a$ intersecte le graphe de f en le point de coordonnées $(a, f(a))$ avec $a \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right[$.
La droite horizontale d'équation $y = f(a)$ intersecte le graphe de f en un deuxième point dont l'abscisse appartient à $[0,1]$. L'abscisse de ce point correspond à $g(a)$.
On a la figure suivante :



Correction 2 1. La fonction racine carrée est pas dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ donc a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. Elle n'est pas dérivable en 0 car $\dfrac{a(x) - a(0)}{x - 0} = \dfrac{2}{\sqrt{x}(x+1)} \to +\infty$.

J'ai noté cette question sur 1 en mettant 1 point à ceux qui ne m'ont pas écrit choses fausses du type " elle n'est pas dérivable en 0 car la fonction racine carrée ne l'est pas (cf remarque de l'ex1).

2. La fonction a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et pour tout $x > 0$, on a

$$a'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}\left(\frac{(x+1)}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\right) = \frac{(x+1) - 2x}{(x+1)^2\sqrt{x}} = \frac{1-x}{(x+1)^2\sqrt{x}}.$$

On a $a'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$ d'où le tableau de variations suivant :

x	0		1		1
$a'(x)$		$+$	0	$-$	
a	0	↗	1	↘	0

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On raisonne par équivalence :

$$a(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = x + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

L'unique solution de $a(x) = 1$ est 1.
On peut aussi dire que 1 est le maximum de la fonction d'après le tableau de variations et qu'il est atteint en $x = 1$.

4. D'après la question précédente, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $a(x) \in [0,1]$ et arcsin est définie sur $[-1,1]$ donc f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et on a vu que $a(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$. On en déduit que f n'est pas dérivable en 1. Par ailleurs, a est dérivable sur $]0,+\infty[$, ainsi f est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

   Il faut maîtriser le cours et les ensembles de départ/dérivabilité pour pouvoir traiter correctement ce genre d'exercice.

5. Soit $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, alors
$$f'(x) = \frac{a'(x)}{\sqrt{1-a^2(x)}}.$$
   On a
$$1-a^2(x) = 1 - \frac{4x}{(1+x)^2} = \frac{(x+1)^2-4x}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2},$$
   On a donc
$$f'(x) = \frac{(1-x)\,|x+1|}{(x+1)^2\sqrt{x}\,|x-1|}.$$
   Pour tout $x > 0$, on a $|x+1| = x+1$, on en déduit :
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}(x+1)} & \text{si } x \in]0,1[\\ -\dfrac{1}{2\sqrt{x}(x+1)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   Pas mal d'erreurs dans le calcul de la dérivée de la composée et surtout beaucoup d'erreurs dans la simplification. J'ai pourtant insisté, j'espère que vous allez le retenir : $\sqrt{a^2} = |a|$ *!*

6. Pour tout $x \in [0,1]$, on définit $g : x \mapsto \arctan(\sqrt{x})$. Cette fonction est dérivable sur $]0,1]$ et pour tout $x \in]0,1[$, on a
$$g'(x) = \frac{1/2\sqrt{x}}{1+x} =$$

Introduire une fonction évite d'écrire $\arctan'(\sqrt{x}) = f'(x)$ *ce qui est faux (vous écrivez la dérivée de* arctan *appliquée en* $\sqrt{x}$*). Comme vous écrivez rarement ce que vaut x, la plupart d'entre vous m'a calculé* $g'(x)$ *sans me dire à quel intervalle appartenait x et donc sans se rendre compte que l'égalité des dérivées n'est pas valable aux bornes (et qu'on ne peut pas directement évaluer en* $x = 0$ *sans avoir justifié que l'on pouvait le faire.)*

7. Soit $x \in [0,1]$, alors $\sqrt{x} \in [0,1]$ donc, par croissance de arctan, $\arctan\sqrt{x} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

   My fault, je n'ai pas écrit explicitement que l'on cherchait à redémontrer l'égalité (mais en lisant la question suivante, vous auriez pu vous en douter! Je n'ai pas pénalisé ceux qui ont montré cette question en utilisant la précédente (mais quand même, en lisant la suivante, vous ne vous êtes pas dit que c'était louche d'utiliser la question 6 pour la redémontrer ??!?). Certains m'ont parlé d'injectivité, ce qui n'apporte rien ici.

8. Soit $\forall x \in [0,1]$. Pour tout $x \in [0,1]$, $\arctan\sqrt{x} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ donc $2\arctan\sqrt{x} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De même $\forall x \in [0,1]$,

$\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a donc

$$\begin{aligned}\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = 2\arctan(\sqrt{x}) \quad &\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = \sin\left(2\arctan\sqrt{x}\right) \text{ car sin est injective sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ &\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = 2\sin\left(\arctan\sqrt{x}\right)\cos\left(\arctan\sqrt{x}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = 2\tan\left(\arctan\sqrt{x}\right)\cos^2\left(\arctan\sqrt{x}\right) \text{ car } \sin = \tan.\cos \\ &\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = 2\sqrt{x}.\frac{1}{1+\tan^2\arctan\sqrt{x}} \text{ car } \cos^2 = \frac{1}{1+\tan^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\end{aligned}$$

et la dernière égalité est vraie donc, par équivalence, la première l'est aussi.

Beaucoup me disent " les deux membres appartiennent à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc on peut appliquer sinus" ce qui n'est pas faux mais donne l'impression qu'on ne pourrait pas appliquer sinus si ce n'était pas le cas (ce qui est faux puisque sinus est défini sur $\mathbb{R}$). Ce qui nous importe ici n'est pas de pouvoir appliquer sinus mais de l'appliquer ET d'obtenir une égalité équivalente. Ceux qui n'ont pas pensé à faire apparaître tangente ont dû justifier la transformation de sinus ET cosinus en racine carrée de leur carrée (car les quantités sont positives) puis ont remplacé $\cos^2$ par $\frac{1}{1+\tan^2}$, ce qui est correct lorsque c'est bien justifié.

9. On peut utiliser l'expression que l'on vient de trouver. En effet, on a $\forall x \in [0,1]$,

$$\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{x+1} = 2\arctan\sqrt{x},$$

et

$$\begin{aligned}\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{x+1} = 2\arctan\sqrt{x} \quad &\Leftrightarrow \arcsin\frac{2/\sqrt{x}}{1+1/x} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &\Leftrightarrow \arcsin\frac{2/\sqrt{x}}{1+1/x} = \pi - 2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).\end{aligned}$$

Soit maintenant $x > 1$, alors $y = \frac{1}{x} \in]0,1[$ donc, d'après ce que l'on vient de faire,

$$\arcsin\frac{2/\sqrt{y}}{1+1/y} = \pi - 2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right),$$

donc

$$\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = \pi - 2\arctan\sqrt{x}.$$

1 On peut également remarquer que pour $x > 1$, $f'(x) = -g'(x)$ donc il existe un réel K tel que

$$\forall x > 1, f(x) = -g(x) + K.$$

Les fonctions f et g étant continues, cette expression est également valable pour 1. En évaluant l'égalité en $x = 1$, on obtient $f(1) = \frac{\pi}{2} = -2\frac{\pi}{4} + K$ donc $K = \pi$. On retrouve que pour tout $x \geqslant 1$,

$$f(x) = \pi - 2\arctan(\sqrt{x}).$$

Correction 3 1. (a) Soit $x \in [-1,1]$, on a :

$$\begin{aligned}\sin(\arccos(x)) &= \sqrt{\sin^2\arccos(x)} \\ &\quad \text{car } \arccos(x) \in [0,\pi] \text{ et sin est positive sur cet intervalle} \\ &= \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\cos(\arcsin(x)) &= \sqrt{\cos^2\arcsin(x)}\\ &\text{car } \arcsin(x)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \text{ et cos est positive sur cet intervalle}\\ &= \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

Le rigoureusement portait sur la justification de $\sin = \sqrt{1-\cos^2}$ car celle-ci, et sa copine symétrique avec cos, ne sont pas toujours vraies. En effet, $x^2 = a$ n'implique pas $x = \sqrt{a}$!!! On a juste $x = \pm\sqrt{a}$ et puis on peut dire des choses si x est de signe constant.

(b) Pour tout $x \in [-1,1]$, on a $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

C'est dommage de m'écrire $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ sans me préciser pour quelles valeurs de x cette égalité est vraie.

2. Les fonctions arcsin et arccos sont définies sur $[-1,1]$ donc $f(x)$ existe si et seulement si on a $-1 \leqslant 3x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant 2x \leqslant 1$ ce qui donne $I = \left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$

3. La fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right[$ et

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right[, f'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

donc f est strictement croissante. On a $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = -\pi + \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) = -\pi - \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$. De même, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{2}{3} = \arcsin\frac{2}{3}$. On a donc :

x	$-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$
$f'(x)$	$+$
f	$\alpha \nearrow \beta$

Avec $\alpha = f(-1/3) = -\pi - \arcsin\frac{2}{3}$ et $\beta = f(1/3) = \arcsin\frac{2}{3}$

De manière générale, c'est mieux de s'interroger sur la dérivabilité d'une fonction AVANT de la dériver. On évite d'écrire $f'(x)$ sans préciser pour quelles valeurs de x l'égalité est vraie. On évite de se tromper en calculant la dérivée d'une composée, c'est rageant! On écrit calmement arccos *en fonction de* arcsin *et on évite de perdre des points en manipulant des nombres relatifs!!*

4. La fonction f est strictement croissante donc injective . De plus elle est continue donc $f(I)$ est un intervalle et d'après le tableau $f(I) = J = [-\pi - \arcsin\left(\frac{2}{3}\right), \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)]$. On en déduit que f induit une bijection de I vers $f(I)$, autrement dit $g = f|^{[-\pi-\arcsin(\frac{2}{3}),\arcsin(\frac{2}{3})]}$ est bijective.
$a = \sqrt{13}$ est l'unique solution de $f(x) = 0$

On commence par l'injectivité, on considère l'image de l'intervalle restreint (ou de tout l'intervalle ici) et on corestreint à cette image.

5. Grâce aux formules de trigonométrie, on peut dire que

$$\sin(f(x)) = \sin(\arcsin(3x))\cos(\arccos(2x)) - \sin(\arccos(2x))\cos(\arcsin(2x)) = 6x^2 - \sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-9x^2}$$

en utilisant les simplifications de la première question.

6. On raisonne par implication :

$$\begin{aligned}
f(x)=t \quad &\Longrightarrow \sin(f(x))=\sin(t)\\
&\Longrightarrow 6x^2-\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-9x^2}=\sin(t)\\
&\Longrightarrow (6x^2-\sin(t))^2=(1-4x^2)(1-9x^2)\\
&\Longrightarrow 36x^4-12x^2\sin(t)+\sin(t)^2=1-13x^2+36x^4\\
&\Longrightarrow (13-12\sin(t))x^2=1-\sin(t)^2=\cos(t)^2\\
&\Longrightarrow x=\pm\frac{\cos(t)}{\sqrt{13-12\sin(t)}}
\end{aligned}$$

celle-là aussi elle vous a posé souci alors je vous le dis une fois pour toute : avant de mettre au carré, on isole la racine carrée ! J'en ai beaucoup qui raisonnent par équivalence (alors qu'on vous demande une implication !!). Pourquoi vous mettre en danger et risquer d'écrire qqch de faux ?

7. On sait que $f(0)=-\pi/2$ et comme f est croissante :

$$x\geqslant 0 \Longrightarrow t=f(x)\in[-\pi/2,\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)] \Longrightarrow \cos(t)\geqslant 0$$

$$x\leqslant 0 \Longrightarrow t=f(x)\in[-\pi-\arcsin\left(\frac{2}{3}\right),-\pi/2] \Longrightarrow \cos(t)\leqslant 0$$

Ainsi x et $\cos(t)$ ont le même signe donc $f(x)=t\Rightarrow x=\dfrac{\cos(t)}{\sqrt{13-12\sin(t)}}$.

Or, on a vu que si $t\in[-\pi-\arcsin\left(\frac{2}{3}\right),\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)]$, $f(x)=t$ admet une unique solution. On en déduit donc que

$$g^{-1}(t)=\frac{\cos(t)}{\sqrt{13-12\sin(t)}}$$

Correction 4 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et g une application de I dans I. On dit que g est une involution de I si $\forall x\in I, g\circ g(x)=x$.

(a) Les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ définies de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+^\star$ sont des involutions.

(b) Si f est une involution sur I, alors $f\circ f=id_I$ donc f est bijective et $f^{-1}=f$.

On évite de me dire qu'elle est bijective car elle est égale à sa bijection réciproque dans la mesure où il faut d'abord montrer la bijectivité pour justifier l'existence de la bijection réciproque. Beaucoup me redémontrent à la main que si $f\circ f$ est bijective, alors f est injective et surjective. Vous perdez du temps inutilement.

2. Soit f une fonction définie de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ vérifiant (P_1) et (P_2).

(a) i. Soit $(y,z)\in]0,+\infty[^2$ tel que $f(y)=f(z)$. Alors, en utilisant le fait que f vérifie la propriété (P_1).

$$yf(1)=f\left(1f(y)\right)=f\left(1f(z)\right)=zf(1).$$

On a bien l'égalité souhaitée $yf(1)=zf(1)$.

Là encore, pourquoi raisonner par équivalence alors qu'on ne vous demande qu'une implication ? Vous écrivez quelque chose de faux puisque $f(y)=f(z)$ n'est équivalent à $f\circ f(y)=f\circ f(z)$ que si f est injective ce que l'on ne sait pas encore.

ii. Puisque f vérifie la propriété (P_1), on a $f(1.f(1))=1f(1)$ donc $f(1)$ et 1 ont même image par f. D'après la question précédente appliquée à $y=f(1)$ et $z=1$, cela implique $f(1)^2=f(1)$. Comme $f(1)\neq 0$ puisque f est à valeurs dans $]0,+\infty[$, on a $f(1)=1$.

iii. Soit $x\in]0,+\infty[$. Alors $f\circ f(x)=f(1f(x))=x.f(1)$ puisque f vérifie la propriété P_1, et comme $f(1)=1$, la fonction f est donc bien une involution de $]0,+\infty[$.

(b) Soit $(a,b)\in]0,+\infty[^2$. Comme suggéré, on commence par chercher un antécédent de b par f. Comme f est une involution, on a $f\left(f(b)\right)=b$. On écrit

$$f(ab)=f\left(af\left(f(b)\right)\right)=f(b)f(a),$$

puisque f vérifie la propriété P_1. On a bien $f(ab)=f(a)f(b)$.

(c) On note $F=\{x>0, f(x)=x\}$ l'ensemble des points fixes de f.

i. Soit $x>0$. Alors $f(xf(x))=xf(x)$ puisque f vérifie la propriété (P_1). On en déduit que $xf(x)\in F$.

ii. Soit $(x,y)\in F^2$,

$$\begin{aligned} f(xy) &= f\left(xf(y)\right) \text{ car } y\in F\\ &= yf(x) \text{ car } f \text{ vérifie la propriété } (P_1)\\ &= yx \text{ car } x\in F \end{aligned}$$

On a donc bien $xy\in F$. On écrit maintenant

$$1=f(1)=f\left(x.\frac{1}{x}\right)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)$$

d'après la question **??**. Par ailleurs, comme $x\in F$, on a $f(x)=x$ donc $1=xf\left(\frac{1}{x}\right)$. Il suffit de diviser par x non nul pour avoir $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}$ ce qui montre $\frac{1}{x}\in F$.

iii. Soit $x\in F$. On raisonne par récurrence sur n, l'initialisation a été montrée à la question **??**. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $x^n\in F$. Alors

$$\begin{aligned} f(x^{n+1}) &= f(x.x^n)\\ &= f\left(xf(x^n)\right) \text{ par hypothèse de récurrence}\\ &= x^n f(x) \text{ car } f \text{ vérifie } P_1\\ &= x^n.x \text{ car } x\in F\\ &= x^{n+1} \end{aligned}$$

On a bien $x^{n+1}\in F$. Par le principe de récurrence, on a montré que pour tout entier n, $x^n\in F$.

iv. Soit $x\in F$. On suppose par l'absurde que $x>1$. Alors $x^n\to+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x^n)=+\infty$ puisque, d'après la question précédente, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(x^n)=x^n$. Or on a supposé f bornée sur $[1,+\infty[$. On a une contradiction. On en déduit que $x\leqslant 1$.

v. Soit $x\in F$, alors d'après la question précédente, $x\leqslant 1$. Or, d'après la question **??**, on sait que $\frac{1}{x}\in F$. On a donc $\frac{1}{x}\leqslant 1$ donc $x=1$. On vient de montrer l'inclusion $F\subset\{1\}$. Or, l'autre inclusion a été montré à la question **??**. On a donc l'égalité $F=\{1\}$.

(d) On a montré que si f vérifie les propriétés (P_1) et (P_2), alors $\forall x>0$, $xf(x)\in F$ et $F=\{1\}$ donc $f(x)=\frac{1}{x}$. Réciproquement, si f est la fonction inverse, alors

$$\forall (x,y)\in]0,+\infty[^2, f\left(xf(y)\right)=\frac{1}{x/y}=\frac{y}{x}=yf(x)$$

donc f vérifie (P_1). Par ailleurs, f est bornée par 1 sur $[1,+\infty[$, elle vérifie donc (P_2).

Conclusion : L'unique fonction définie de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ vérifiant (P_1) et (P_2) est la fonction inverse.