Lycée du Parc
PCSI 842
Feuille 9

Année 2025-2026

TD 9 : Suites.

1 Comparaison des suites

Exercice 1.
Comparer (à l'aide de o et $\sim$) les suites suivantes :

1. $u_n = n+1,\ v_n = n$
2. $u_n = n^2,\ v_n = n$
3. $u_n = \ln n,\ v_n = n$
4. $u_n = \sin(\frac{1}{n}),\ v_n = \frac{1}{n}$

Exercice 2.
Donner des équivalents simples (sans somme) des termes généraux suivants :

1. $cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. $2^n + n^{10^4}$
3. $(n+\sqrt{n})^a - n^a$ où a est un réel non nul

2 Vrai/Faux

Exercice 3.
Vrai/Faux? On donnera une justification lorsque c'est juste, un contre-exemple lorsque c'est faux.

1. Si une suite converge vers 0 et est de premier terme strictement positif, alors elle est strictement décroissante.
2. Si une suite est strictement décroissante et positive, alors elle converge vers 0.
3. Si une suite diverge vers $+\infty$, alors elle est croissante à partir d'un certain rang.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et ne s'annule pas, alors $\frac{1}{u_n} \to +\infty$ ou $\frac{1}{u_n} \to -\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
5. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ ssi : $(\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n \geqslant N)(|u_n - l| \leqslant \epsilon)$.
6. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ ssi : $(\forall \epsilon \geqslant 0)(\exists N)(\forall n \geqslant N)(|u_n - l| \leqslant \epsilon)$.
7. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l et l' et que $l \leqslant l'$, alors à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$.
8. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l et l' et que $l < l'$, alors à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$.

3 Convergence et calcul de limites

Exercice 4.
Les suites suivantes sont-elles convergentes ?

1. $u_n = 1 + (-1)^n$.
2. $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.
3. $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$.
4. $u_n = (1+\frac{1}{n})^{2n}$.

Exercice 5.
Calculer, lorsqu'elle existe, la limite des suites définies par :

$u_n = n - \sqrt{n^2 - n} \quad v_n = \dfrac{\sin n^2 - \cos n^3}{n} \; w_n = \sqrt[n]{3 - \sin n^2}$

$a_n = \dfrac{n^3 + 2^n}{3^n} \quad b_n = (\cos n)\sin\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Exercice 6.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrez que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor$ est convergente et calculez sa limite.

Exercice 7.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 7$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 8.
Pour tout entier n, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n \,\mathrm{d}x$. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 9.
Montrer que la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{n}{n+1}u_n^2$ admet une limite qu'on déterminera.

4 Expression du terme général

Exercice 10.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = u_n + 2n + 3$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+1)^2.$$

Exercice 11.
Déterminer la limite de toute suite réelle vérifiant $2(v_{n+1} - v_{n+2}) = v_n$.

Exercice 12.
Soit la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n - 4$. Trouver $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que la suite définie par $v_n = u_n + \gamma$ vérifie $v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$. En déduire une expression de u_n pour tout n.

Exercice 13.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n - 1$ est une suite géométrique. En déduire une expression de u_n pour tout n.

5 Suites récurrentes

Exercice 14.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant \sqrt{2}$.
2. Puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{\left|u_n - \sqrt{2}\right|^2}{2}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2^{2^n-1}}$ et donner la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 15.
Étudier la nature de la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{(1+u_n)^4}$ en fonction de la valeur de u_0.

Exercice 16.
Étudier la suite définie par $u_0 \geqslant 1$, $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$ en fonction de la valeur de u_0.

6 Exercices plus théoriques

Exercice 17.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(x_n) + x_n = n$. Montrer que la suite est bien définie et déterminer la nature de la suite.

Exercice 18.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe un unique $x_n \in [0,1]$ tel que $\sum_{k=1}^{n} x_n^k = 1$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer qu'elle est minorée par $1/2$.
4. Montrer qu'elle converge vers $1/2$.

Exercice 19.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 20.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer qu'elle est stationnaire.

Exercice 21.

Pour n un entier naturel non nul,on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Vérifiez que $\forall n \geqslant 1, H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$ et que H est croissante.
2. Déduisez-en simplement que $H_n \to +\infty$.
3. On admet que $(H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers γ. Déterminer la limite de $(H_{2n} - H_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Exercice 22.
Pour tout entier r supérieur ou égal à 2 et tout entier naturel non nul n, on note :

$$S_n(r) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r}$$

1. En remarquant que, $k^{-r} \leqslant (k-1)^{-1} - k^{-1}$ (pour r et k à préciser), montrez que la suite $(S_n(r))_n$ converge, pour tout entier $r \geqslant 2$.
2. On note σ_r la limite de la suite précédente.
   Montrez que la suite $(\sigma_r)_{r\geqslant 2}$ est décroissante.
3. (a) Vérifiez que $\forall k \geqslant 2, \frac{1}{k^r} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^r}$.
   Déduisez-en : $\forall n \geqslant 2, 1 \leqslant S_n(r) \leqslant 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^r}$.
   (b) Montrez que : $\forall r \geqslant 2, 1 \leqslant \sigma_r \leqslant 1 + \frac{1}{r-1}$.
   Déduisez-en la limite de σ.

7 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 23.
Donner des équivalents simples (sans somme) des termes généraux suivants :

1. $n^2 - l n(n) + e^{1/n}$
2. $2^n - e^n + \ln(n) - \cos(3n^2)$
3. $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1.$

Exercice 24.
Les suites suivantes sont-elles convergentes ?

1. $u_n = \frac{n+1}{n^2+3}$.
2. $u_n = \frac{e^n}{n}$.

Exercice 25.
Soit $a > 0$. Calculer, lorsqu'elle existe, la limite des suites définies par :
$u_n = \sqrt{n(n+a)} - n \quad v_n = \frac{n}{2}\sin\frac{n\pi}{2} \quad w_n = \cos\left(\frac{2^n}{n!}\right) \quad z_n = \frac{n^2+(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}}$
$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n+3} \quad b_n = \frac{n^3 \sin\frac{1}{n}}{n^2+3n-1} \quad c_n = n^4 \ln(1+e^{-n}).$

Exercice 26.
Déterminez les limites des suites $u_n = n^{1/n}$ et $v_n = (a^n + b^n)^{1/n}$, où a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

Exercice 27.
Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \sqrt{n}\left\lfloor \frac{\lfloor n\sqrt{n}\rfloor}{n} \right\rfloor$.

Exercice 28.
Montrer que la suite de terme général $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ converge.

Exercice 29.
Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 30.
Déterminer la nature de la suite de terme général $v_n = \frac{\left\lfloor \frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor\right\rfloor}{\sqrt{n}}$.

Exercice 31.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Exercice 32.
Donner une expression en fonction de n de la suite définie par $u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}$, $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$.

Exercice 33.
Donner une expression pour tout n de la suite définie par $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$, $u_0 = 1$, $u_1 = 2$.

Exercice 34.
Déterminer une expression du terme général de la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et

$$\forall n \geqslant 1, u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}.$$

Exercice 35.
Déterminer une expression du terme général de la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -3u_n + 2$.

Exercice 36.
Déterminer une expression du terme général de la suite définie par $u_1 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_{n+1} = n(n+1)u_n$$

8 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 37.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone. Montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ est monotone, de même sens de monotonie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 38.
La suite de terme général $u_n = \lfloor\lfloor\sqrt{n}\rfloor - \sqrt{n}\rfloor$ admet-elle une limite ?

Exercice 39.
Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$, $u_{n+1} = \frac{1}{u_n+1}$ en fonction de la valeur de u_0.

Exercice 40.
Soit $n \in \mathbb{N}$ la suite définie par $e^{x_n} + x_n = \frac{1}{n+1}$.

1. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer qu'elle converge.

Exercice 41.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $x_n^3 + x_n = \frac{1}{n}$.
2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite

Exercice 42.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ et (E) l'équation $\tan(x) = x$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution x_n dans I_n
2. Déterminer la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + v_n$.

Exercice 43.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution réelle. On note u_n cette solution.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire qu'elle converge et donner sa limite.

Exercice 44.

On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $b_0 > a_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Montrer que ces deux suites sont bien définies puis qu'elles convergent vers la même limite.

Exercice 45.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et (v_n) des suites réelles.

1. On suppose : $u_n \to a$ avec $a > 0$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = +\infty$.
2. On suppose $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} - v_n = a$ avec $a > 0$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Memo

- Comment montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est monotone ?
  - Déterminer le signe de $u_{n+1}-u_n$.
  - Déterminer si le quotient u_{n+1}/u_n est inférieur ou non à 1 si la suite est à termes positifs.
  - Utiliser la définition implicite de la suite, c'est-à-dire la monotonie de la fonction si la suite est définie comme antécédent.
- Comment déterminer si une suite converge/admet une limite ?
  - Utiliser le théorème d'encadrement (ou juste minoration ou majoration pour une limite infinie)
  - Étudier sa monotonie et son caractère bornée
  - Étudier des suites extraites (deux suites extraites ayant des limites différentes pour contredire la convergence, convergence même une même limite des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ pour conclure à la convergence.
- Comment déterminer la limite d'une suite ?
  - Calculer sa limite
  - Utiliser l'unicité de la limite
  - Encadrer/majorer/minorer la suite
- Comment donner une expression en fonction de n d'une suite définie par récurrence ?
  - Appliquer le cours si c'est une suite géométrique ou récurrente linéaire d'ordre 2.
  - Se ramener à une suite dont on connaît l'expression (c'est-à-dire une des deux précédentes)
  - Faire une récurrence (en "intuitant" la formule sur les premiers termes)
- Comment étudier une suite récurrente définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est une fonction continue ?
  - On détermine les points fixes de f.
  - Si on peut déterminer la monotonie de la suite sans calcul (ou presque), on conclut.
  - Sinon, on dresse le tableau de variations de f, on en déduit des intervalles stables par f.
  - Si f est croissante
    - On détermine le signe de la fonction $g : x\mapsto f(x)-x$ pour connaître la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La monotonie de la suite peut dépendre de la valeur de u_0.
    - On étudie le comportement de la suite selon la valeur de u_0.
  - Si f est décroissante
    - On étudie le signe de $g : x\mapsto f\circ f(x)-x$ pour connaître la monotonie de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ selon la valeur de u_0.
    - On étudie le comportement de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ selon la valeur de u_0.
    - On étudie la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}=\big(f(u_{2n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant la continuité de f.
    - On en déduit la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Si f change de variations
  On étudie le comportement de la suite selon la valeur de u_0 en travaillant sur des intervalles stables par f pour se ramener aux situations précédentes (f croissante ou f décroissante).

Correction du TD n 9

Correction 1

1. $v_n \sim u_n$
2. $v_n = o(u_n)$
3. $u_n = o(v_n)$ (croissance comparée)
4. $u_n \sim v_n$

Correction 2

1. $cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1$.
2. $2^n + n^{10^4} \sim 2^n$
3. Soit $a \neq 0$. $(n+\sqrt{n})^a - n^a = n^a\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^a - 1\right) \sim n^a \frac{a}{\sqrt{n}}$
4. $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$.

Correction 3

1. Faux, $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.
2. Faux, $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.
3. Faux, $u_{2n} = 2n$ et $u_{2n+1} = n$.
4. Faux, $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.
5. vrai, découle de la définition.
6. faux, si $\epsilon = 0$ cela signifie que la suite est stationnaire à partir d'un certain rang si elle converge.
7. faux si $l = l'$ et $v_n < u_n$.
8. vrai, en appliquant la définition à $\epsilon < \frac{l'-l}{2}$ et pour un rang suffisamment grand, on a $u_n < l + \epsilon < l' - \epsilon < v_n$.
9. faux, $u_n = (-1)^n$.
10. vrai, contraposée de "convergente donc bornée".
11. faux, $u_n = -\frac{1}{n}$.
12. faux, $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Correction 4

1. Non, car $u_{2n} \to 2$ et $u_{2n+1} \to 0$.
2. oui, elle tend vers 0.
3. non, car $u_{4n} = 1$ et $u_{4n+2} = -1$.
4. on écrit $u_n = exp\left(2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$. On a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc $2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim 2$, on en déduit que $u_n \to e^2$.

Correction 5

— $u_n = n - \sqrt{n^2-n} = \frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-1/n}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

— $|v_n| \leqslant \frac{|\sin n^2|+|\cos n^3|}{n} \leqslant \frac{2}{n}$ donc v_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

— $w_n = e^{\frac{1}{n}\ln(3-\sin n)}$. On a $2 \leqslant 3 - \sin n \leqslant 4, \forall n$ donc $\ln 2 \leqslant \ln(3-\sin n) \leqslant \ln 4, \forall n$ et par le théorème des gendarmes, $\frac{1}{n}\ln(3-\sin n) \to 0$ donc $w_n \to 1$ par continuité de l'exponentielle.

— $a_n = \frac{n^3}{e^{n\ln 3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^n$, chaque terme tend vers 0 donc a_n aussi.

— $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \to 0$ donc par continuité de sinus, $\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \to 0$ et cosinus étant bornée, on a $b_n \to 0$.

Correction 6

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\forall k \in [\![1,n]\!], kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leqslant kx$ donc, en sommant les inégalités, $\sum_{k=1}^{n} kx - 1 < \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \leqslant \sum_{k=1}^{n} kx$ puis $\frac{xn(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{xn(n+1)}{2n^2}$ Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $u_n \to \frac{x}{2}$.

Correction 7

1. Par récurrence sur n.

2. On montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. En effet, si $n\in\mathbb{N}$, alors

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+2u_n+35}{u_n+\sqrt{2u_n+35}}.$$

Le polynôme $X^2-2X-35$ est de discriminant 144, les racines sont donc 7 et -5, il est positif entre ses racines. D'après la question précédente, on sait que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in]0,7[\subset]-5,7[$. On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est majorée, elle est convergente.

Correction 8

On calcule $I_{n+1}-I_n$:

$$I_{n+1}-I_n=\int_1^e(\ln x)^{n+1}\,\mathrm{d}x-\int_1^e(\ln x)^n\,\mathrm{d}x=\int_1^e\left((\ln x)^{n+1}-(\ln x)^n\right)\mathrm{d}x.$$

Pour tout $x\in[1,e]$, on a $0\leqslant\ln x\leqslant 1$ donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ (\ln x)^{n+1}\leqslant(\ln x)^n.$$

Par croissance de l'intégrale, on a $I_{n+1}-I_n\leqslant 0$ et la suite est décroissante.

Par positivité de l'intégrale, on sait, de plus, qu'elle est minorée par 0. On peut donc affirmer qu'elle converge.

Correction 9 On calcule $u_{n+1}-u_n$, on trouve :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{nu_n^2}{n+1}\geqslant 0,$$

donc la suite est croissante. Si elle converge vers une limite finie l, on $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}u_n^2=l^2$. Par unicité de la limite, on doit avoir

$$l=l+l^2,$$

ce est équivalent à $l=0$. Or, la suite est positive par une récurrence immédiate, étant donné qu'on a supposé $u_0>0$. Elle ne peut donc croire vers 0 ce qui montre que la suite tend vers $+\infty$

Correction 10 On le montre par récurrence sur $\mathbb{N}$. Pour $n=0$, le résultat est vrai. On suppose qu'il est vrai au rang $n+1$. On a :

$$u_{n+1}=u_n+2n+3=(n+1)^2+2n+3,$$

par hypothèse de récurrence. Or :

$$(n+1)^2+2n+3=n^2+2n+1+2n+3=n^2+4n+4=(n+2)^2.$$

La formule est vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, on a montré qu'elle est vraie pour tout entier n.

Correction 11 L'équation caractéristique est

$$2r^2-2r+1=0.$$

Ses racines sont $\frac{2\pm 2i}{4}=\frac{1\pm i}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\pi}{4}}$. On en déduit que les suites vérifiant $2(v_{n+1}-v_{n+2})=v_n$ sont de la forme

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\alpha\cos\frac{n\pi}{4}+\beta\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Quelque soient les réels α et β, le terme $\alpha\cos\frac{n\pi}{4}+\beta\sin\frac{n\pi}{4}$ est borné et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=0$ donc une telle suite tend vers 0, quels que soient ses premiers termes.

Correction 12 Posons $v_n=u_n+\gamma$, alors

$$v_{n+2}=u_{n+2}+\gamma=u_{n+1}+2u_n-4+\gamma=\left(v_{n+1}-\gamma\right)+2\left(v_n-\gamma\right)+\gamma-4=v_{n+1}+2v_n-2\gamma-4.$$

Pour avoir l'égalité souhaitée, il faut $\gamma=-2$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente dont on peut déterminer l'expression. Son équation caractéristique est

$$r^2-r+2=0,$$

dont les racines sont -1 et 2. On en déduit qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=\alpha(-1)^n+\beta 2^n$. On a $u_0=1$ donc $v_0=-1=\alpha+\beta$ et $u_1=1$ donc $v_1=-1=-\alpha+2\beta$. On en déduit que $\alpha=-\frac{1}{3}$ et $\beta=-\frac{2}{3}$. On a donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\frac{(-1)^{n+1}}{3}-dfrac2^{n+1}3,$$

d'où

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{3}-dfrac2^{n+1}3+2.$$

Correction 13 On a

$$v_{n+1}=u_{n+1}-1=2u_n-2=2v_n,$$

la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison 2. On a :

$$\forall n\in\mathbb{N}, v_n = 2^n v_0 = 2^n(u_0-1),$$

on en déduit que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = v_n+1 = 2^n(u_0-1)+1.$$

Correction 14

1. On pose $f : x\mapsto \frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$. La fonction est croissante sur $[1,+\infty[$ (calcul de dérivée).
   On remarque que $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, on va donc procéder par récurrence. On a $u_0 = 2 \geqslant \sqrt{2}$, le résultat est donc vrai au rang 0. On suppose qu'il existe un entier n tel que $u_n \geqslant \sqrt{2}$. On applique f qui est croissante sur $[1,+\infty[$. On obtient $f(u_n)\geqslant f(\sqrt{2})$ d'où $u_{n+1}\geqslant\sqrt{2}$. La propriété est héréditaire. Par le principe de récurrence, on a $f(u_n)\geqslant\sqrt{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} u_{n+1}-\sqrt{2} &= \frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)-\sqrt{2}\\ &= \frac{u_n^2+2-2\sqrt{2}u_n}{2u_n}\\ &= \frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2u_n}\\ &\leqslant \frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2} \text{ car } u_n\geqslant\sqrt{2}\geqslant 1\end{aligned}$$

   On a bien l'inégalité souhaitée.
3. L'inégalité à montrer est vraie pour $n=0$ car $\left|u_0-\sqrt{2}\right|\leqslant 1$. La propriété est donc initialisée. On suppose qu'il existe un entier n tel que $\left|u_n-\sqrt{2}\right|\leqslant\frac{1}{2^{2^n-1}}$
   On a

$$\begin{aligned}\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right| &\leqslant \frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2} \text{ d'après la question précédente}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2^n-1}}\right)^2 \text{ par hypothèse de récurrence}\\ &= \frac{1}{2\left(2^{2^{n+1}-2}\right)}\\ &\leqslant \frac{1}{2^{2^{n+1}-1}}\end{aligned}$$

   La propriété est vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.
   On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-\sqrt{2})=0$, d'après l'inégalité que l'on vient de montrer.

Correction 15 Les points fixes, et donc les limites possibles sont les réels l tels que

$$\frac{l^2}{(1+l)^4} = l \Leftrightarrow l^2 = (l+1)^4 \Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } (1+l)^4 = 1.$$

On a donc $l=0$ ou $l=-2$.

On remarque que la suite est à termes positifs à partir du rang 1. L'unique limite possible est donc 0.
De plus, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{(1+u_n)^4}.$$

Or, pour tout $n\geqslant 1$, $1+u_n>1$ donc

$$(1+u_n)^4 > 1+u_n > u_n.$$

On en déduit que, pour tout $n\geqslant 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$

ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme la suite est minorée, elle est convergente et nous avons montré que l'unique limite possible est 0.

Correction 16 On a $u_0\geqslant 1$, il est alors clair que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant 1$. On pose $f(x) = 1+\ln(x)$, on va étudier f sur $[1,+\infty[$. La fonction est croissante, d'image $[1,+\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc monotone et minorée. On pose $g(x) = f(x)-x$. On a

$$g'(x) = \frac{1-x}{x},$$

donc $g'(x)\leqslant 0$ pour tout $x\geqslant 1$. Comme $g(1)=0$, on en déduit que g est négative. Par suite, quelque soit $u_0\in\mathbb{R}$, on a $u_1-u_0\leqslant 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est minorée, on sait qu'elle converge. Sa limite est l'unique point fixe de f : 1.

Correction 17 On pose $f(x) = \ln x + x$. La fonction f est strictement croissante et son image est $\mathbb{R}$, elle est donc bijective ce qui nous assure que la suite est bien définie.
De plus, on a :

$$f(x_n) = n < n+1 = f(x_{n+1})$$

donc, par croissance de f,

$$x_n < x_{n+1}$$

ce qui montre que la suite est croissante. On sait donc qu'elle admet une limite. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite réelle l alors, par continuité de f,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(l),$$

or :

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite réelle, elle tend vers $+\infty$.

Correction 18

1. On pose $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$. La fonction f_n ainsi définie est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective. Comme, de plus, $f(0) = 0$ et $f(1) = n$, on sait que 1 est un élément de $f([0,1])$ donc il admet un unique antécédent dans $[0,1]$.
2. Pour étudier la monotonie de la suite, on remarque que, pour tout x, on a $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$. On a donc
$$f_n(x_n) \leqslant f_{n+1}(x_n).$$
Or $f_n(x_n) = 1 = f_{n+1}(x_{n+1})$, donc
$$f_{n+1}(x_{n+1}) \leqslant f_{n+1}(x_n),$$
ce qui permet de conclure que $x_{n+1} \leqslant x_n$, par croissance de la fonction f_n. La suite ainsi définie est donc décroissante.
3. On calcule : $f_n(1/2) = \frac{1}{2}\frac{1-1/2^n}{1-1/2} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$. On a donc $f_n(1/2) < f_n(x_n)$ donc, par croissance de f_n, $x_n \geqslant \frac{1}{2}$.
4. On sait que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$, elle est donc convergente. Notons l sa limite réelle. On a $f_n(x) = x\frac{1-x^n}{1-x}$ donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = \frac{l}{1-l}$ car $l \in \left[\frac{1}{2},1\right[$. Comme, de plus, $f_n(x_n) = 1$, on a, par unicité de la limite, $\frac{l}{1-l} = 1$ d'où $l = \frac{1}{2}$.

Correction 19 On note l_1, l_2 et l_3 les limites respectives des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$.

La suite $(u_{10n})_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois une suite extraite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$. Par unicité de la limite, on a donc $l_1 = l_3$. De même, la suite $(u_{10n+5})_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois une suite extraite de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$. Par unicité de la limite, on a donc $l_2 = l_3$. On en déduit que $l_1 = l_2$ donc les suites extraites des indices pairs et impairs convergent vers la même limite. On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction 20 On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l. Par définition de la limite, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in \left]l-\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}\right[$. Or il y a au plus un unique dans l'intervalle ouvert $\left]l-\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}\right[$, la suite est donc stationnaire à partir du rang N, égale à cet entier.

Correction 21

1. On a $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Pour tout k dans $[|n+1,2n|]$, on a $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$ donc, en sommant les inégalités :
$$H_{2n} - H_n \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$
2. On sait que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, elle admet donc une limite. Si cette limite est réelle, notons-la l, alors $H_{2n} - H_n \to l - l = 0$, ce qui est impossible car cette différence est minorée par 2. On en déduit que la suite tend vers $+\infty$.
3. On a $H_{2n} - \ln(2n) \to \gamma$ donc $H_{2n} - \ln(2n) - H_n + \ln(n) \to 0$. On en déduit que $H_{2n} - H_n \to \ln(2)$.

Correction 22

1. On sait que pour tout $k > 1$, on a $k^2 \geqslant k^2 - k$ donc $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k^2-k}$, ce qu'on peut aussi écrire :
$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$
Pour $r \geqslant 2$, on a $k^r \geqslant k^2$ donc $\frac{1}{k^r} \leqslant \frac{1}{k^2}$. On en déduit que pour tout $k > 1$ et tout $r \geqslant 2$, on a :
$$\frac{1}{k^r} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$
On en déduit, on sommant les inégalités entre 2 et n, que :
$$S_n(r) \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n-1} \leqslant 2.$$
La suite est donc majorée. Comme, on a :
$$S_{n+1}(r) - S_n(r) = \frac{1}{(n+1)^r} \geqslant 0,$$
la suite est croissante, on en déduit qu'elle converge.

2. Pour tout k entre 1 et n, on a $\frac{1}{k^{r+1}} \leqslant \frac{1}{k^r}$. En sommant entre 1 et n, on obtient

$$S_n(r+1) \leqslant S_n(r),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit, en passant à la limite, que $\sigma_{r+1} \leqslant \sigma_r$ donc la suite $(\sigma_r)_{r\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. (a) Pour tout $x \in [k-1,k]$, on a $\frac{1}{k^r} \leqslant \frac{1}{x^r}$. On intègre entre $k-1$ et k, on obtient :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^r}dx \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^r},$$

ce qui implique $\frac{1}{k^r} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^r}$. On somme ces inégalités entre 2 et n, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^r} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^r},$$

ce qui se réécrit, grâce à la relation de Chasles :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^r} \leqslant \int_{1}^{n} \frac{dx}{x^r}.$$

On a ajoute 1 de chaque côté :

$$S_n(r) \leqslant 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^r}.$$

Comme il est clair que $S_n(r) \geqslant 1$, on a l'encadrement souhaité.

(b) On a $\int_1^n \frac{dx}{x^r} = \left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_1^n = \frac{1}{(1-r)n^{r-1}} - \frac{1}{1-r}$. On a donc :

$$1 \leqslant S_n(r) \leqslant \frac{1}{(1-r)n^{r-1}} - \frac{1}{1-r} + 1.$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$. On obtient :

$$1 \leqslant \sigma_r \leqslant 1 + \frac{1}{r-1}.$$

Enfin, on fait tendre r vers $+\infty$. Par le thm d'encadrement, on en déduit que $\lim_{r\to+\infty} \sigma_r = 1$.

Correction 23

1. $n^2 - ln(n) + e^{1/n} \sim n^2$
2. $2^n - e^n + \ln(n) - \cos(3n^2) \sim e^n$
3. $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$

Correction 24

1. oui, elle tend vers 0.
2. non, elle tend vers $+\infty$ par le thm de croissances comparées.

Correction 25

— $u_n = \sqrt{n(n+a)} - n = \frac{na}{\sqrt{n^2+na}+n} = \frac{a}{\sqrt{1+a/n}+1}$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{a}{2}$.

— $v_{4p+1} = \frac{4p+1}{2} \to +\infty$ mais $v_{2p} = 0, \forall p$ donc (v_n) ne peut pas converger.

— On a $\frac{2^n}{n!} \to 0$ quand n tend vers $+\infty$ donc par continuité de cosinus, $\lim_{n\to+\infty} w_n = 1$.

— $z_n = \underbrace{\frac{n^2}{n^2+\sqrt{n}}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}}}_{\to 0}$ donc $\lim_{n\to+\infty} z_n = 1$.

— $a_n \sim \frac{1}{n}$ donc $a_n \to 0$.

— $b_n \sim n \sin\frac{1}{n}$ donc $b_n \to 1$.

— $c_n \sim n^4 e^{-n}$ donc $c_n \to 0$ par croissances comparées.

Correction 26

$u_n = exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)\right)$. Par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ donc, par continuité de l'exponentielle, $u_n \to 1$. On a :

$$(a^n + b^n)^{1/n} = b\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1\right)^{1/n},$$

et

$$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1\right)^{1/n} = exp\left(\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1\right) \to 1$$

donc $v_n \to b$.

Correction 27

On a :

$$\lfloor n\sqrt{n} \rfloor > n\sqrt{n} - 1,$$

donc :

$$\frac{\lfloor n\sqrt{n} \rfloor}{n} > \frac{n\sqrt{n}-1}{n},$$

et, par croissance de la partie entière,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor n\sqrt{n}\rfloor}{n} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{n\sqrt{n}-1}{n} \right\rfloor > \frac{n\sqrt{n}-1}{n} - 1.$$

On a donc :

$$u_n > \sqrt{n}\left(\frac{n\sqrt{n}-1}{n} - 1\right) = \sqrt{n}\left(\frac{n\sqrt{n}-n-1}{n}\right),$$

or, $\sqrt{n}\left(\frac{n\sqrt{n}-n-1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc, par minoration, $u_n \to +\infty$.

Correction 28 On encadre le terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on en déduit, par encadrement, que la suite converge vers 0.

Correction 29 Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$0 \leqslant \frac{t^n}{(1+t)^2} \leqslant t^n,$$

donc

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^n\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2} \leqslant \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^n}.$$

Comme $\int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^n} = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, on obtient :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1},$$

ce qui permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Correction 30 On encadre :

$$\forall n > 0, \frac{n}{2} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{n}{2},$$

donc

$$\forall n > 0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{2}.$$

On en déduit que :

$$\forall n > 0, 0 < \frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor < 1,$$

donc $\left\lfloor \frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\rfloor = 0$. On a donc :

$$\forall n > 0, v_n = 0,$$

ce qui montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (puisqu'elle est constante) et que sa limite est nulle.

Correction 31 On a $u_n \geqslant \frac{n}{\sqrt{2n}}$ donc $u_n \to +\infty$.

Correction 32 L'équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$ possède 1 et -2 pour racines, on sait donc qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha 1^n + \beta(-2)^n = \alpha + \beta(-2)^n.$$

Déterminons α et β à l'aide des premiers termes :

$$u_0 = 0 = \alpha + \beta,$$

et

$$u_1 = 3 = \alpha - 2\beta.$$

On a donc $\alpha = -\beta$ et $\alpha = 1$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - (-2)^n = 1 + (-2)^{n+1}.$$

Correction 33 On écrit l'équation caractéristique :

$$r^2 - r + 1 = 0.$$

Ses racines sont $\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{i\pi}{3}}$. On en déduit qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$u_n = \alpha\cos\frac{n\pi}{3} + \beta\sin\frac{n\pi}{3}.$$

On a $u_0 = 1 = \alpha$ et $u_1 = 2 = \alpha\cos\frac{\pi}{3} + \beta\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que $\beta = \sqrt{3}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3}.$$

Correction 34 L'équation caractéristique est $r^2-r-2=0$ dont les racines sont -1 et 2. Il existe donc $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\alpha(-1)^n+\beta 2^n.$$

On a $u0=0=\alpha+\beta$ et $u_1=1=-\alpha+2\beta$. On en déduit que $\beta=\frac{1}{3}=-\alpha$ donc

$$\forall n\in d n, u_n=\frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right).$$

Correction 35 On cherche α tel que $(u_n-\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique. On trouve $\alpha=\frac{1}{2}$, on a donc $\left(u_n-\frac{1}{2}\right)$ géométrique de raison -3 et de premier terme $u_0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$. On en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$u_n-\frac{1}{2}=\left(-\frac{1}{2}\right)(-3)^n,$$

d'où, $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=\frac{(-1)^{n+1}3^n}{2}+\frac{1}{2}.$$

Correction 36 On a, pour $n\geqslant 2$, $u_{n+1}=(n+1)nu_n=(n+1).n^2(n-1)u_{n-1}$. On en déduit que $u_{n+1}=(n+1).(n!)^2.u_0$ donc

$$\forall n\geqslant 1, u_n=2n\left((n-1)!\right)^2.$$

Correction 37 On suppose, dans un premier temps que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}u_k\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}u_k+\frac{u_{n+1}}{n+1}\\
&= \frac{n}{n+1}v_n+\frac{u_{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

ainsi,

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n+1}(-v_n+u_{n+1})$$

Or,

$$v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_n,$$

donc $v_n\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}$ par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On en déduit que $v_{n+1}-v_n$ est positif donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc $(-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi puis $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

On peut aussi (un peu plus tordu, je vous l'accorde) écrire :

$$\begin{aligned}
v_{n+1}-v_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}u_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k\\
&= \frac{u_{n+1}}{n+1}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}u_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k\\
&= \frac{u_{n+1}}{n+1}+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}u_k\\
&= \frac{u_{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}u_k\\
&= \frac{u_{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=k}^{n}(u_j-u_{j+1})\right)+u_{n+1}\right)\\
&= \frac{u_{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}(u_j-u_{j+1})+\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}u_{n+1}\\
&= \frac{u_{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}(u_j-u_{j+1})-\frac{u_{n+1}}{n+1}\\
&= \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}(u_{j+1}-u_j)
\end{aligned}$$

Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors pour tout j, $(u_{j+1}-u_j)$ est de signe constant et $v_{n+1}-v_n$ est alors également du même signe donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également monotone, de même monotonie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction 38 On a $u_{n^2}=\lfloor\lfloor\sqrt{n^2}\rfloor-\sqrt{n^2}\rfloor=0$ et

$$-1<\lfloor\sqrt{n^2+1}\rfloor-\sqrt{n^2+1}\leqslant 0.$$

De plus, $\lfloor\sqrt{n^2+1}\rfloor-\sqrt{n^2+1}\neq 0$ car si c'était le cas, alors n^2+1 serait un entier. On aurait alors $n^2+1=m^2$ d'où $n^2-m^2=1=(n-m)(n+m)$ ce qui est impossible pour $n>1$. On a donc :

$$-1<\lfloor\sqrt{n^2+1}\rfloor-\sqrt{n^2+1}<0.$$

ce qui implique, par définition de la partie entière, que $u_{n^2+1}=-1$. On a trouvé deux suites extraites de (u_n) possédant des limites différentes donc la suite n'admet pas de limite.

Correction 39 On a $u_0>0$, il est clair que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$. On pose $f(x)=\frac{1}{x+1}$, on étudie cette fonction sur $\mathbb{R}_+^*$. On commence par déterminer si f possède des points fixes. On a $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$. Il y a deux solutions :

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

mais seule $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ est positive. On note $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Elle est décroissante, on a le tableau de variations suivant :

x	0	α	$+\infty$
f	1 $\searrow$	α $\searrow$	0

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0,1]$ donc la suite est bornée. De plus, $f \circ f$ est croissante donc la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. On peut donc affirmer qu'elle est convergente quelque soit la valeur de u_0.

Déterminons ses limites possibles. On a

$$\begin{aligned} & f \circ f(x) = x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1+x}{2+x} = x \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + x - 1 = 0. \end{aligned}$$

L'unique limite (positive) possible est α. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \alpha$ puis, $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = f(\alpha) = \alpha$ par continuité de f. Enfin, les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Correction 40

1. On note $f : x \mapsto e^x + x$. Alors f est strictement croissante, son image vaut $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $\frac{1}{n+1}$ admet un unique antécédent que l'on note x_n.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$ donc $f(x_{n+1}) < f(x_n)$. Comme f est croissante, on en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Si elle ne converge pas, elle tend vers $-\infty$. On aurait alors $f(x_n) \to -\infty$ par continuité de f. Or $f(x_n) \to 0$. On en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Correction 41

1. La fonction $f : x \mapsto x^3 + x$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{n}$ admet un unique antécédent.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ donc $f(x_{n+1}) < f(x_n)$. Comme f est croissante, on en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.

   Enfin, on remarque que $f(0) = 0 < \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Donc, toujours pas croissance de f, $x_n > 0$ pour tout n. La suite est donc décroissante et minorée, on peut affirmer qu'elle converge. On note l sa limite. Par continuité de f, on a $f(x_n) \to l^3 + l$. Or $f(x_n) = \frac{1}{n} \to 0$. Par unicité de la limite, on a $l + l^3 = 0$. On en déduit que $l = 0$ et la suite converge vers 0.

Correction 42

1. La fonction $x \mapsto \tan(x) - x$ est dérivable sur I_n, de dérivée $x \mapsto \tan^2 x$ donc f est croissante. On a $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+n\pi} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+n\pi} = -\infty$ d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\frac{\pi}{2}+n\pi$	$\frac{\pi}{2}+n\pi$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

   La fonction f est bijective de I_n dans $\mathbb{R}$, elle s'annule donc une unique fois sur I_n. On en déduit que l'équation (E) admet une unique solution dans I_n.

2. On a $x_n \geqslant n\pi - \frac{\pi}{2}$ donc, par le thm de minoration, $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

3. On aimerait poser $v_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$ et appliquer la définition de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à savoir $\tan(x_n) = x_n$ mais

   $$\forall n \in \mathbb{N}, x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \in]0, \pi[,$$

   sur lequel tan n'est pas définie.
   On reprend le tableau de variations de f et on fait apparaître $f(n\pi) = -n\pi$:

x	$-\frac{\pi}{2}+n\pi$	$n\pi$	$\frac{\pi}{2}+n\pi$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$-n\pi$	$+\infty$

et comme $f(x_n) = 0$ et f strictement croissante, on en déduit que $x_n \geqslant n\pi$:

x	$-\frac{\pi}{2}+n\pi$	$n\pi$	x_n	$\frac{\pi}{2}+n\pi$
$f'(x)$		$+$		
f	$-\infty$	$-n\pi$	0	$+\infty$

On pose $v_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. Comme $x_n \in \left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, on a $v_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$. On a $\tan(v_n) = \tan(x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}) = \tan(x_n - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\tan(x_n)} = -\frac{1}{x_n}$.

On a donc $v_n = \arctan\left(-\frac{1}{x_n}\right)$ car $v_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par continuité de arctan, on en déduit que $v_n \to 0$.

Correction 43

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^3 + nx$. Cette fonction est continue et impaire. On a $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ donc $\mathrm{Im}(f_n) = \mathbb{R}$. On en déduit que 1 admet un antécédent par f_n. De plus, elle est strictement croissante donc injective, 1 admet donc un unique antécédent par f_n, on le note u_n.
2. On a $f_n(1) = 1 + n$ et $f_n(0) = 0$ donc pour $n \geqslant 1$, $f_n(1) > f_n(u_n) > 0$. Par croissance de (u_n), on a $0 < u_n < 1$. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = x^3 + nx + x = f_n(x) + x$ donc pour tout $x > 0$, on a
$$f_{n+1}(x) > f_n(x).$$
On a donc
$$f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n), \text{ or } f_n(u_n) = 1 = f_{n+1}(u_{n+1}),$$
on a donc
$$f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1}),$$
et, par croissance de f, on en déduit $u_{n+1} < u_n$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc convergente.
Notons l sa limite. Si $l \neq 0$, alors $u_n^3 + nu_n \to +\infty$. Or $f_n(u_n) = 1$, on a donc une contradiction. On en déduit que la limite est nulle.

Correction 44

On commence par s'assurer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n > 0$, ce qui est clair par une récurrence immédiate. Les deux suites sont donc bien définies.

On remarque ensuite que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right)^2}{2}$ donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} \geqslant a_{n+1}.$$
On en déduit que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, b_n \geqslant a_n,$$
et ce résultat est également vrai au rang 0 par hypothèse.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, alors
$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leqslant b_n,$$
puisque $a_n \leqslant b_n$. Ainsi, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

De même, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geqslant \sqrt{a_n^2}$ donc $(a_n > 0)$, $a_{n+1} \geqslant a_n$ et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On se retrouve alors avec
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_0.$$
On en déduit que les deux suites sont bornées donc convergentes par le théorème de limite monotone. Enfin, si on note l et l' les limites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $b_{n+1} \to l'$ et $b_{n+1} \to \frac{l + l'}{2}$ donc, par unicité de la limite, $l = l'$ et les deux suites tendent vers la même limite.

Correction 45

1. On sait qu'il existe N tel que $\forall n \geqslant N$, $u_n \geqslant \frac{a}{2}$. On a donc, pour $n \geqslant N$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} u_k \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} u_k + (n-N+1)\frac{a}{2}$. Par le thm de minoration, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$.
2. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} - v_n = a$ avec $a > 0$. Alors, d'après la question précédente, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = +\infty,$$
or $\sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.