Correction du DS n 4

Exercice 1 1. (a) L'ensemble des racines $n-$ièmes de l'unité est $\left\{\exp\frac{2ik\pi}{n},\ \text{où } k\in[|0,n-1|]\right\} = \{w^k, k\in [\![0,n-1]\!]\}$.

(b) Soit $n\geqslant 2$, alors $\omega\neq 1$ et on a

$$\sum_{k=0}^{n}\omega_k=\sum_{k=0}^{n}\left(\exp\frac{2i\pi}{n}\right)^k=\frac{1-(e^{2i\pi/n})^n}{1-e^{2i\pi/n}}=\frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{2i\pi/n}}=0.$$

(c) On écrit

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\omega_k=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\omega^k=\sum_{k=0}^{n-1}(-\omega)^k$$

On remarque que pour $n=2$, $-\omega=1$ et la somme vaut 2. Pour $n>2$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\omega_k=\frac{1-(-\omega)^n}{1-\omega}=\frac{1-(-1)^n}{1-\omega}$$

car c'est une somme géométrique donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\omega_k=\begin{cases}0 \text{ si } n \text{ est pair}\\ \dfrac{2}{1-\omega} \text{ sinon}\end{cases}$$

Dans le cas où n est impair, on peut encore simplifier le résultat en utilisant la factorisation par l'arc moitié :

$$\frac{2}{1-\omega}=\frac{2}{e^{i\pi/n}}2i\sin\frac{\pi}{n}=-\frac{ie^{\frac{i\pi}{n}}}{\sin\frac{\pi}{n}}=1-\tan\frac{\pi}{n}.$$

(d) Soit z_0 une racine $n$ième de a, alors on sait que les racines n-ièmes de a sont

$$z_0, z_0\omega,\dots,z_0w^{n-1}$$

donc la somme des racines n-ièmes de a vaut

$$\sum_{k=0}^{n-1}z_0\omega^k=z_0\sum_{k=0}^{n-1}w^k=0$$

Attention, la notation la puissance $\frac{1}{n}$ n'est définie que pour un réel (et même un réel positif dans le cas où n est pair !).

2. (a) Soient z_1, z_2 deux nombres complexes. On a :

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}\\ &= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})\\ &= z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}\\ &= |z_1|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}+|z_2|^2\\ &= |z_1|^2+2\mathcal{R}e\,(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2\end{aligned}$$

ce qui montre l'égalité souhaitée.

(b) On applique l'égalité précédente à $z_1 = \omega_k$ et $z_2 = -1$. On a alors :

$$|1-\omega_k|^2 = |\omega_k - 1|^2 = |\omega_k|^2 + 2\mathcal{R}e\,(-\omega_k) + |1|^2 = 2 - 2\mathcal{R}e(\omega_k),$$

car ω_k est de module 1.

(c) D'après la question précédente, on a:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\ 1-\omega_k|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 2 - 2\mathcal{R}e(\omega_k) = 2n - 2\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{R}e(\omega_k).$$

Par linéarité de la partie réelle, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{R}e(\omega_k) = \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k\right) = \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right).$$

On reconnaît la somme des racines n-ièmes de l'unité qui vaut 0 donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\ 1-\omega_k|^2 = 2n.$$

3. (a) Posons $\alpha = \exp\frac{i\pi}{n}$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \mathrm{Im}\ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \exp\frac{ki\pi}{n}\right)$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \exp\tfrac{ki\pi}{n} \quad &= \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha)^k \\
&= \mathrm{Im}\ \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha},\ \text{ car } \alpha \neq 1 \\
&= \frac{2}{1-\alpha} \\
&= \frac{2}{-e^{\frac{i\pi}{n}} 2i \sin\frac{k\pi}{n}} \\
&= \frac{ie^{-\frac{i\pi}{n}}}{\sin\frac{k\pi}{n}}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \mathcal{I}m\left(\frac{ie^{-\frac{i\pi}{n}}}{\sin\frac{k\pi}{n}}\right) = \mathrm{cotan}\frac{k\pi}{n},$$

où $\mathrm{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$.

On peut aussi écrire :

$$\mathcal{I}m\left(\frac{2}{1-\alpha}\right) = 2\mathcal{I}m\left(\frac{1-\bar{\alpha}}{|1-\alpha|^2}\right) = \frac{2\mathcal{I}m(\alpha)}{|1-\alpha|^2}$$

Or

- $\mathrm{Im}\ \alpha = \sin\dfrac{\pi}{n} = 2\sin\dfrac{\pi}{2n}\cos\dfrac{\pi}{2n}$, et
- $|1-\alpha|^2 = 1 + 1 - 2\mathcal{R}e\alpha = 2\big(1-\cos(\pi/n)\big) = 4\sin^2\left(\pi/2n\right)$

D'où $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{2-2\cos\frac{\pi}{n}} = \mathrm{cotan}\frac{\pi}{2n}}$,

(b) Le calcul a été fait ci-dessus : $\mid 1-\omega_k \mid = \sqrt{4\sin^2\frac{k\pi}{n}} = \boxed{2\sin\dfrac{k\pi}{n}}$ car $k\pi/n$ appartient à l'intervalle $[0,\pi]$ sur lequel sin est positif.

(c) On utilise les deux questions précédentes $\sum_{k=0}^{n-1} \mid 1-\omega_k| = 2\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \boxed{2\text{cotan}\dfrac{\pi}{2n}}$.

4. On a :

$$W_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mid \omega_{k+1}-\omega_k| = \sum_{k=0}^{n-1} \mid \omega_{k+1}-\omega_k| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^{k+1} - \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^{k} \right|$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left|e^{\frac{2i\pi}{n}}\right|^k}_{=1} \left|e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1\right| = n\left|e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1\right| = n\left|e^{\frac{i\pi}{n}} - 2i\sin\frac{\pi}{n}\right| = \boxed{2n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

car $|-2i| = 2$ et $\left|e^{\frac{i\pi}{n}}\right| = 1$ (et le sinus est positif comme on l'a montré précédemment).

5. $\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} 2n\sin\dfrac{\pi}{n} = \lim_{n\to+\infty} 2\pi\dfrac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} = \boxed{2\pi}$.

On aura reconnu que W_n est le périmètre d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité. On pouvait ainsi s'attendre à ce que ce périmètre tende vers celui du cercle.