Devoir surveillé 4.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1. On considère les deux équations différentielles définies sur $\mathbb{R}_+^\star$:

$$(E_1) \quad xy' - y = \ln x.$$

$$(E_2) \quad x^2 y'' - xy' + y = 1 - \ln x.$$

1. *Résolution de* (E_1).
   (a) Résoudre l'équation homogène associée à (E_1).
   (b) Déterminer une solution particulière de (E_1).
   (c) Exprimer l'ensemble des solutions de l'équation (E_1).
2. *De* (E_1) *à* (E_2).
   (a) Montrer que si y est solution de (E_1), alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $x^2 y''(x) = 1$.
   (b) En déduire que si y est solution de (E_1), alors y est solution de (E_2).
3. *Résolution de* (E_2).
   On rappelle que si y_0 est une solution particulière de (E_2) et si S_h est l'ensemble des solutions de l'équation homogène de (E_2), alors l'ensemble des solutions de (E_2) est :
   $$\{y_0 + y_h \,;\, y_h \in S_h\}.$$
   (a) Soit $y : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On pose $z : x \mapsto \frac{y(x)}{x}$.
      i. Montrer que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$.
      ii. Exprimer les dérivées successives de y en fonction de celles de z.
      iii. Montrer que y est solution de l'équation homogène associée à (E_2) si et seulement si z' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on déterminera.
      iv. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E_2).
   (b) Exprimer l'ensemble des solutions de l'équation (E_2).
4. Déterminer l'unique solution f de l'équation (E_2) vérifiant $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$. Cette fonction est-elle solution de (E_1) ?
5. Donner une solution de (E_2) qui n'est pas solution de (E_1).

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{C}^*$. On considère d'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 - 2az + b = 0$$

On note z_1 et z_2 les racines de (E). L'objectif de ce problème est de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $|z_1| = |z_2|$ et une condition nécessaire et suffisante pour que $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)\,[2\pi]$.

1. Questions préliminaires :
   (a) Donner, en fonction de a et b, les valeurs de $z_1 + z_2$ et de $z_1.z_2$.
   (b) Soit $z \in \mathbb{C}^\star$, montrer que :
   $$z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z \in \mathbb{R} \text{ ou } z \in \mathbb{U}$$
   (c) On considère la fonction :
   $$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left|x + \frac{1}{x}\right| \end{cases}$$
   Montrer que f admet un minimum et le calculer.
2. Étude d'exemples :
   Dans les cas particulier suivants, a-t-on $|z_1| = |z_2|$? $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)\,[2\pi]$?
   (a) $z^2 - 2(1+i)z + 4i = 0$,
   (b) $z^2 - (2-i)z + 3 - i = 0$,
   (c) $z^2 - 3(1+2i)z - 6 + 8i = 0$.
3. Une condition nécessaire et suffisante pour que $z_1 = z_2$.
   Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $z_1 = z_2$.
4. Une condition nécessaire et suffisante pour que $|z_1| = |z_2|$.
   (a) On suppose que $|z_1| = |z_2|$.
      i. Exprimer $\dfrac{a^2}{b}$ en fonction des arguments de z_1 et z_2.
      ii. Montrer que $\dfrac{a^2}{b} \in]0,1]$.
   (b) i. Montrer que si $\dfrac{a^2}{b} \in \mathbb{R}$, alors $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$.
      ii. Montrer que si $\dfrac{a^2}{b} \in \left]0,1\right]$, alors $|z_1| = |z_2|$.
   (c) Conclure.
5. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)\,[2\pi]$.
   (a) On suppose que $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)\,[2\pi]$
      i. Exprimer $\dfrac{b}{a^2}$ en fonction des modules de z_1 et z_2.
      ii. Montrer que $\dfrac{b}{a^2} \in \left]0,1\right]$.
   (b) Montrer que si $\dfrac{b}{a^2} \in \left]0,1\right]$, alors $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)\,[2\pi]$.
   (c) Conclure.
6. Vérification : En utilisant les questions 4. et 5., retrouver les résultats des questions 2. et 3.

Exercice 3. Dans cet exercice, on cherche à résoudre l'équation d'inconnue x :

$$x^2 - \lfloor x \rfloor = 3 \quad (E)$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - \lfloor x \rfloor - 1 < x^2 - x \leqslant x^2 - \lfloor x \rfloor$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, solution de (E).
   (a) Montrer que $x^2 - x \in]2,3]$.
   (b) Montrer que $x \in]-2,-1[\cup]2,3[$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 4.

1. Montrer que pour tout $t > 0, e^t > 1 + t$.
2. L'objet de cette question est la résolution du problème de Cauchy :

$$(P_1) \begin{cases} x'(t) = t^2 + x(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

   où x est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
   (a) Résoudre l'équation différentielle $x'(t) = t^2 + x(t)$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire la solution x_0 au problème de Cauchy (P_1).
3. On s'intéresse maintenant aux fonctions y de $C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$(P_2) \begin{cases} y'(t) \geqslant y(t), \forall t \geqslant 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

   (a) Montrer que dans le cas d'égalité

$$\begin{cases} y'(t) = y(t), \forall t \geqslant 0 \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

   il n'y a qu'une solution qu'on précisera.
   (b) Chercher une fonction solution de (P_2) différente de la fonction constante nulle, sous la forme $y(t) = P(t)e^t$, où P est un polynôme.
   (c) Montrer que si une fonction y est solution, alors y est à valeurs positives (on pourra s'intéresser à la fonction $t \mapsto \frac{y(t)}{e^t}$).
4. On souhaite montrer qu'il n'existe pas de fonction z de $C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$(P_3) \begin{cases} z'(t) = t^2 + z(t)^2 + z(t), \forall t \geqslant 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

   On raisonne par l'absurde : supposons qu'une fonction z vérifie les conditions ci-dessus.
   (a) On pose $y = z - x_0$. En se servant des résultats des questions 2 et 3, montrer que pour tout $t \geqslant 0$, $y(t) \geqslant 0$.
   (b) Montrer que $z(t) > 0$ pour $t > 0$.
   (c) En déduire que z est croissante.
   On admet que z possède une limite en $+\infty$.
   (d) Montrer que pour $t > 0$, $\dfrac{z'(t)}{z^2(t)} > 1$.
   (e) Soit $u > 0$ fixé. Montrer, pour $t > u$, l'inégalité $\dfrac{1}{z(u)} - \dfrac{1}{z(t)} > t - u$.
   (f) En déduire une contradiction.

Correction du DS n 4

Correction 1 1. (a)
$$\begin{aligned} xy'-y=0 &\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)'=0\\ &\Leftrightarrow \exists c\in\mathbb{R},\ \frac{y}{x}=c\\ &\Leftrightarrow \exists c\in\mathbb{R},\ y=cx \end{aligned}$$
Les solutions de $(E_1') : xy'-y=0$ sont donc les applications $\boxed{x\mapsto cx}$ avec $c\in\mathbb{R}$.

(b) Soit $\theta : \begin{array}{l}\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}\\ x\to -\ln x-1\end{array}$.

$\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\ x\theta'(x)-\theta(x)=-1+1+\ln x=\ln x.$

Donc θ est solution particulière de (E_1).

(c) Les solutions de (E_1) sont les sommes d'une solution particulière et de la solution générale de (E_1'). Donc les solutions (E_1) sont les fonctions de la forme

$$\boxed{\{}x\mapsto -\ln x-1+cx\ ;\ c\in\mathbb{R}\}$$

2. (a) Soit y une solution de (E_1). Cela veut dire qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $y : x\mapsto -\ln x-1+cx$. On note qu'une telle fonction est deux fois dérivable. On calcule alors : pour tout $x>0$,

$$y'(x)=-\frac{1}{x}+c \qquad y''(x)=\frac{1}{x^2}$$

d'où pour tout $x>0$, $x^2y''(x)=1$.

(b) Soit y une solution de (E_1). Alors d'après la question précédente $x^2y''(x)=1$. Donc pour tout $x>0$:

$$x^2y''(x)-xy'+y=\underbrace{x^2y''(x)}_{=1}-\left(\underbrace{xy'-y}_{=\ln(x)}\right)=1-\ln(x)$$

donc y est solution de (E_2).

3. i. Comme y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, z l'est aussi par quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

ii. Comme pour tout $x>0$, $y(x)=xz(x)$, il vient :

$$\forall x>0,\qquad y'(x)=xz'(x)+z(x)\quad\text{ et }\quad y''(x)=xz''(x)+2z'(x).$$

iii. On a alors :

$$\begin{aligned} &\forall x>0,\quad x^2y''(x)-xy'(x)+y(x)=0\\ \Longleftrightarrow\ &\forall x>0,\quad x^2(xz''(x)+2z'(x))-x(xz'(x)+z(x))+xz(x)=0\\ \Longleftrightarrow\ &\forall x>0,\quad x^3z''(x)+x^2z'(x)=0\\ \underset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow}\ &\forall x>0,\quad x(z')'(x)+z'(x)=0. \end{aligned}$$

La chaîne d'équivalences écrite prouve que y est solution de l'équation différentielle homogène associée à (E_2) si et seulement si la fonction z' est solution d'une nouvelle équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 que l'on note $(E_3) : xh'+h=0$.

iv. L'ensemble des solutions de (E_3) est $\{x \mapsto \frac{\lambda}{x}\,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}$. On reprend donc le fil :

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution homogène de } (E_2) &\iff z' \text{ est solution de} (E_3)\\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : \forall x > 0, z'(x) = \frac{\lambda}{x}\\
(\text{ on intègre! }) &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \forall x > 0,\ z(x) = \lambda \ln(x) + \mu\\
&\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \forall x > 0,\ y(x) = \lambda x \ln(x) + \mu x
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E_2) est donc :

$$\boxed{\{x \mapsto \lambda x \ln(x) + \mu x\,;\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}}.$$

Comme toutes les solutions de (E_1) sont solutions de (E_2), en particulier la fonction $x \mapsto -1 - \ln(x)$ est solution particulière de (E_2). L'ensemble des solutions de (E_2) s'écrit donc :

$$\boxed{\{x \mapsto -1 - \ln(x) + \lambda x \ln(x) + \mu x\,;\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}}.$$

(4) Soit f une solution de (E_2) vérifiant $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$. Comme f est solution de (E_2), il existe des réels λ et μ des réels tels que :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = -1 - \ln(x) + \lambda x \ln(x) + \mu x.$$

Alors on a pour tout $x > 0$: $f'(x) = -\frac{1}{x} + \lambda(\ln(x) + 1) + \mu$. Comme $\ln(1) = 0$, les relations $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$ s'écrivent donc $\begin{cases} -1 + \mu = 0, \\ -1 + \lambda + \mu = 0, \end{cases}$ ce qui impose $(\lambda, \mu) = (0, 1)$.

L'unique solution de (E_2) vérifiant les conditions initiales indiquées est donc la fonction

$$\boxed{f : x \mapsto -1 - \ln(x) + x.}$$

On remarque que cette fonction est bien solution de (E_1) en comparant avec la forme générale des solutions : f est la solution de (E_1) obtenue pour $c = 1$.

5. Pour trouver une solution de (E_2) qui n'est pas solution de (E_1), il suffit de prendre une solution de (E_2) avec un paramètre λ non nul, par exemple $y : x \mapsto -1 - \ln(x) + x \ln(x)$. Cette fonction est bien solution de (E_2) par construction, par contre comme

$$\forall x > 0, y'(x) = -\frac{1}{x} + \ln(x) + 1,$$

si on injecte dans (E_1) on obtient pour tout $x > 0$:

$$x y'(x) - y(x) = -1 + x \ln(x) + x + 1 + \ln(x) - x \ln(x) = x + \ln(x) \neq \ln(x)$$

donc y n'est pas solution de (E_1).

Correction 2 1. Questions préliminaires :

(a) *Donner, en fonction de a et b, les valeurs de $z_1 + z_2$ et de $z_1.z_2$.*
D'après les formules de Viète, on a $z_1 + z_2 = -2a$ et $z_1 + z_2 = b$.

(b) *Soit $z \in \mathbb{C}^*$, montrer que :*

$$z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z \in \mathbb{R} \text{ ou } |z| = 1)$$

Soit $z \in \mathbb{C}^\star$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
z+\frac{1}{z} \in \mathbb{R} \quad & \Leftrightarrow z+\frac{1}{z} = \overline{z}+\frac{1}{\overline{z}} \\
& \Leftrightarrow z-\overline{z} = \frac{1}{\overline{z}} - \frac{1}{z} \\
& \Leftrightarrow z-\overline{z} = \frac{z-\overline{z}}{|z|^2} \\
& \Leftrightarrow z-\overline{z} = 0 \text{ ou } |z|^2 = 1 \\
& \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } z \in \mathbb{U}
\end{aligned}$$

On a bien l'équivalence souhaitée : $\boxed{z+\frac{1}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z \in \mathbb{R} \text{ ou } |z| = 1)}$

(c) *On considère la fonction :*

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \to \left|x+\frac{1}{x}\right|$$

Montrer que f admet un minimum et le calculer.

On remarque que la fonction est paire, on va donc l'étudier sur $\mathbb{R}_+^\star$. Pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ donc

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

On constate que f admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^\star$ qui vaut 2, f admet donc, par parité, un minimum sur $\mathbb{R}^\star$

2. *Étude d'exemples :*
Dans les cas particulier suivants, a-t-on $|z_1| = |z_2|$? $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)\ [2\pi]$?

(a) $z^2 - 2(1+i)z + 4i = 0$,
On calcule le discriminant $\Delta = 4(1+i)^2 - 16i = -8i = \left(2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}\right)^2$. On a donc deux racines :

$$z_1 = (1+i) + \sqrt{2}e^{3i\pi/4} = 2i \text{ et } z_2 = (1+i) - \sqrt{2}e^{3i\pi/4} = 2.$$

On a $\underline{|z_1| = 2 = |z_2|}$ et $\arg(z_1) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, $arg(z_2) \equiv 0[2\pi]$ donc $\underline{\arg(z_1) \not\equiv arg(z_2)[2\pi].}$

(b) $z^2 - (2-i)z + 3 - i = 0$,
On calcule le discriminant $\Delta = -9$, les racines sont donc $z_1 = 1+i$ et $z_2 = 1-2i$. On a $|z_1| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_1) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ et $|z_2| = \sqrt{5}$. On ne sait pas calculer un argument de z_2. En revanche, si on suppose, par l'absurde, que $\arg(z_2) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$, alors on aurait $z_2 = \sqrt{5}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)$, ce qui n'est pas le cas. On en déduit que
$\boxed{|z_1| \neq |z_2| \text{ et } \arg(z_1) \not\equiv \arg(z_2)[2\pi].}$

(c) $z^2 - 3(1+2i)z - 6 + 8i = 0$.
On calcule le discriminant $\Delta = -3+4i$. Reste à déterminer une racine carrée du discriminant. On cherche (x,y) réels tels que $(x+iy)^2 = -3+4i$. On doit résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{9+16} = 5 \\ xy > 0 \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ xy > 0 \end{cases}$$

d'où $(x+iy) = \pm(1+2i)$. On a donc $z_1 = 2+4i$ et $z_2 = 1+2i$. On a $z_2 = 2z_1 \neq 0$ donc $\underline{|z_1| \neq |z_2|}$ et $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)\,[2\pi]$.

3. *Une condition nécessaire et suffisante pour que $z_1 = z_2$.*
   Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $z_1 = z_2$.
   On a $z_1 = z_2$ si seulement si le discriminant est nul. On a donc
   $\boxed{z_1 = z_2 \Leftrightarrow a^2 = b.}$
4. *Une condition nécessaire et suffisante pour que $|z_1| = |z_2|$.*
   (a) *On suppose que $|z_1| = |z_2|$.*
      i. *Exprimer $\frac{a^2}{b}$ en fonction des arguments de z_1 et z_2.*
      Notons r, θ_1, θ_2 des réels (avec $r > 0$) tels que pour $j \in \{1,2\}$, $z_j = re^{i\theta_j}$. On a $z_1 + z_2 = re^{i\theta_1} + re^{i\theta_2} = 2a$ et $r^2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} = b$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{4a^2}{b} &= \frac{\left(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}\right)^2}{e^{i(\theta_1+\theta_2)}} \\ &= \frac{\left(e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} 2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\right)^2}{e^{i(\theta_1+\theta_2)}} \\ &= 4\cos^2\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) \end{aligned}$$

      d'où $\boxed{\dfrac{a^2}{b} = \cos^2\left(\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}$
      ii. *Montrer que $\frac{a^2}{b} \in]0,1]$.*

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\cos\alpha \in [-1,1]$ donc $\cos^2\alpha \in [0,1]$. On en déduit que $\underline{\dfrac{a^2}{b} \in [0,1]}$ d'après l'égalité trouvée à la question précédente.

Par ailleurs, $a \neq 0$ par hypothèse, on a donc $\boxed{\dfrac{a^2}{b} \in]0,1].}$

   (b) i. *Montrer que si $\frac{a^2}{b} \in \mathbb{R}$, alors $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$.*
      On suppose $\dfrac{a^2}{b} \in \mathbb{R}$ donc $\dfrac{4a^2}{b} \in \mathbb{R}$. D'après les formules de Viète, on a donc $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2} \in \mathbb{R}$ donc $\dfrac{z_1}{z_2} + 2 + \dfrac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$ puis
      $\boxed{\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}.}$
      ii. *Montrer que si $\frac{a^2}{b} \in \left]0,1\right]$, alors $|z_1| = |z_2|$.*

Si $\dfrac{a^2}{b} \in]0,1]$, alors, d'après la question précédente, on a $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$. En posant $z = \dfrac{z_1}{z_1}$, on a donc $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$ et nous avons montré que cela implique $z \in \mathbb{R}$ ou $z \in \mathbb{U}$. Si $z \in \mathbb{R}$, on a $\dfrac{4a^2}{b} = f(z) + 2$ avec f la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$. Celle-ci admet un minimum sur $\mathbb{R}^\star$ en 2. On a donc $\dfrac{4a^2}{b} \geqslant 4$ d'où $\dfrac{a^2}{b} \geqslant 1$ ce qui est absurde. On en déduit que $z \in \mathbb{U}$ donc $\underline{|z_1| = |z_2|}.$

(c) On a montré que si $|z_1| = |z_2|$, alors $\dfrac{a^2}{b} \in]0,1]$(phase d'analyse) puis que si $\dfrac{a^2}{b} \in]0,1]$, alors $|z_1| = |z_2|$ (phase de synthèse). On en déduit que $\boxed{|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{b} \in]0,1].}$

5. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)\ [2\pi]$.

   (a) *On suppose que* $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)\ [2\pi]$

   i. *Exprimer* $\frac{b}{a^2}$ *en fonction des modules de* z_1 *et* z_2.
   Notons r_1 et r_2 les modules de z_1 et z_2. Il existe alors $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z_1 = r_1 e^{i\theta}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta}$. On a $b = z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{2i\theta}$ et $4a^2 = \left(r_1 e^{i\theta} + r_2 e^{i\theta}\right)^2 = (r_1 + r_2)^2 e^{2i\theta}$. On en déduit que $\boxed{\dfrac{b}{a^2} = \dfrac{4r_1 r_2}{(r_1+r_2)^2}.}$

   ii. Montrer que $\frac{b}{a^2} \in \left]0,1\right]$.
   On a $b \neq 0$ par hypothèse et $\dfrac{b}{4a^2} > 0$ car r_1 et r_2 sont strictement positifs. Raisonnons par équivalence :
   $$\begin{aligned} \frac{b}{a^2} \leqslant 1 \quad &\Leftrightarrow 4r_1 r_2 \leqslant (r_1+r_2)^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant (r_1 - r_2)^2 \end{aligned}$$
   la dernière inégalité est vraie donc, par équivalence, la première l'est aussi. On a donc bien $\boxed{\dfrac{b}{a^2} \in]0,1].}$

   (b) *Montrer que si* $\frac{b}{a^2} \in \left]0,1\right]$, *alors* $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)\ [2\pi]$.
   On suppose $\dfrac{b}{a^2} \in]0,1]$, alors l'équation $z^2 - 2az + b = 0$ a un discriminant $\Delta = 4a^2 - 4b = 4a^2\left(1 - \dfrac{b}{a^2}\right) \geqslant 0$. Les racines sont donc $a \pm a\sqrt{1 - \dfrac{b}{a^2}}$. On remarque que $1 \pm \sqrt{1 - \dfrac{b}{a^2}} \geqslant 0$, on en déduit que $\arg(z_1) \equiv \arg(a)[2\pi]$ et de même pour $\arg(z_2)$ ainsi on a $\boxed{\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)[2\pi].}$

   (c) Par analyse synthèse, on a montré que
   $\boxed{\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)[2\pi] \Leftrightarrow \dfrac{b}{a^2} \in]0,1]}$

6. Vérification : *En utilisant les questions 4. et 5., retrouver les résultats des questions 2. et 3.*

On reprend les trois équations de la question 2 :

— $z^2 - 2(1+i)z + 4i = 0$. On a $a = (1+i)$ et $b = 4i$ donc $\dfrac{a^2}{b} = \dfrac{1}{2} \in]0,1[$ et les modules sont bien égaux et les arguments non.

— $z^2 - (2-i)z + 3 - i = 0$. On a $a = \dfrac{(2-i)}{2}$ et $b = 3 - i$ donc $\dfrac{a^2}{b} = \dfrac{3-2i}{4(3-i)} = \dfrac{13-9i}{40} \notin \mathbb{R}$ et ni les modules ni les arguments ne sont égaux.

— $z^2 - 3(1+2i)z - 6 + 8i = 0$. On a $a = \dfrac{3(1+2i)}{2}$ et $b = -6 + 8i$ donc $\dfrac{b}{a^2} = \dfrac{(-6+8i)4}{9(-3+4i)} = \dfrac{8}{9} \in]0,1[$, les arguments sont bien congrus modulo 2π et les modules sont différents.

On a $z_1 = z_2$ si et seulement si $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)[2\pi]$ ET $|z_1| = |z_2|$. D'après les questions 4 et 5, on en déduit que $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{b} \in]0,1]$ et $\dfrac{b}{a^2} \in]0,1]$ donc

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b} = 1 \Leftrightarrow a^2 = b,$$

et on retrouve le résultat de la question 3.

Correction 3 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc

$$-\lfloor x \rfloor - 1 < x \leqslant \lfloor x \rfloor,$$

puis $\underline{x^2 - \lfloor x \rfloor - 1 < x^2 - x \leqslant x^2 - \lfloor x \rfloor}$.

2. (a) Si x est solution, $x^2 - \lfloor x \rfloor = 3$ donc, en remplaçant dans l'encadrement trouvé à la question précédente, on obtient :

$$\underline{2 < x^2 - x \leqslant 3}.$$

(b) On peut tracer le tableau de variations de $f : x \mapsto x^2 - x$. La fonction f est croissante sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et $f(]2,3[) =]2,6[$. Elle est décroissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ et $f(]-2,-1[) =]2,6[$. Si x est solution, on a montré à la question précédente que $f(x)$ appartient à $]2,3] \subset]2,6[$. On a donc $f(x) \in]2,6[$ d'où $x \in f^{-1}(]2,6[) =]-2,-1[\cup]2,3[$.

x	$-\infty$	-2	-1	$\frac{1}{2}$	2	3	$+\infty$
$f(x)$		$-$		0	$+$		
f	0	6	2	1	2	6	0

Il est également possible de déterminer les racines de $x^2 - x = 2$ et $x^2 - x = 3$. On trouve -1 et 2 pour la première équation, $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ pour la deuxième. On a $x^2 - x > 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$ et $x^2 - x \leqslant 3 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$. Or $\sqrt{13} < 4$ d'où $\frac{1+\sqrt{13}}{2} < \frac{1+4}{2} < 3$ et $\frac{1-\sqrt{13}}{2} > \frac{1-4}{2} > -2$. On en déduit que x appartient à $]-2,3[$ et $]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$, $\underline{\text{il appartient donc à }]-2,-1[\cup}$

3. On a montré (phase d'analyse) que si x était solution de (E), alors x appartenait à $]-2,-1[\cup]2,3[$. Réciproquement (phase de synthèse), prenons x dans $]-2,-1[\cup]2,3[$ et déterminons s'il est solution de (E).
   - <u>1er cas :</u> Si $x \in]-2,-1[$, alors $\lfloor x \rfloor = -2$. On a donc $x^2 - \lfloor x \rfloor = x^2 + 2$ d'où $x^2 + 2 = 3$ ce qui est impossible car $x < -1$.
   - <u>2ème cas :</u> Si $x \in]2,3[$, alors $\lfloor x \rfloor = 2$, on a donc $x^2 - \lfloor x \rfloor = x^2 - 2 = 3$ d'où $x^2 = 5$ et, comme x est positif, $x = \sqrt{5}$.

   $\boxed{\text{L'unique solution de } (E) \text{ est } x = \sqrt{5}}$

Correction 4 1. *Montrer que pour tout $t > 0$, $e^t > 1 + t$.*

On peut par exemple étudier la fonction $f : t \mapsto e^t - t - 1$ qui est dérivable et dont la dérivée est $f' : t \mapsto e^t - 1$. On a $f'(t) > 0$ pour $t > 0$ donc f est strictement croissante donc $f(t) > f(0) = 0$ pour $t > 0$ ce qui est équivalent à l'inégalité souhaitée.

Attention, l'inégalité de convexité donne une inégalité large.

2. *L'objet de cette question est la résolution du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} x'(t) = t^2 + x(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

où x est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

(a) *Résoudre l'équation différentielle $x'(t) = t^2 + x(t)$ sur $\mathbb{R}$.*

On commence par résoudre l'équation homogène associée $x' = x$ dont les solutions sont de la forme $t \mapsto \lambda e^t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2 $at^2 + bt + c$. En injectant dans l'équation, on trouve :

$$2at + b = t^2 + at^2 + bt + c \Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \\ 2a = b \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -2 \end{cases}$$

Une solution particulière est donc $t \mapsto -(t^2 + 2t + 2)$ et l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est

$$\{t \mapsto \lambda e^t - (t^2 + 2t + 2), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

(b) *En déduire la solution x_0 au problème de Cauchy.*

Déterminons $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que $x : t \mapsto \lambda e^t - (t^2 + 2t + 2)$ vérifie $x(0) = 0$. On trouve $\lambda = 2$ donc la solution x_0 au problème de Cauchy est $x_0 : t \mapsto 2e^t - (t^2 + 2t + 2)$.

3. *On s'intéresse maintenant aux fonctions y de $C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ vérifiant :*

$$(P_2) \begin{cases} y'(t) \geqslant y(t), \forall t \geqslant 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(a) *Montrer que dans le cas d'égalité*

$$\begin{cases} y'(t) = y(t), \forall t \geqslant 0 \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

il n'y a qu'une solution qu'on précisera.

Soit y une telle solution. On a $y' = y$, donc on sait que y est de la forme $y(t) = \lambda e^t$. Pour qu'on ait $y(0) = 0$, il faut $\lambda = 0$ et y est donc la solution nulle.

(b) *Chercher une fonction solution de (P_2) différente de la fonction constante nulle, sous la forme $y(t) = P(t)e^t$, où P est un polynôme.*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $y(t) = P(t)e^t$, alors $y'(t) = (P'(t) + P(t))e^t$ donc $y'(t) \geqslant y(t) \Leftrightarrow P'(t)e^t \geqslant 0 \Leftrightarrow P'(t) \geqslant 0$. On peut, par exemple choisir $P'(t) = 1$. Pour que y s'annule en 0, il faut que P s'annule en 0 ; c'est le cas pour $P(t) = t$ et $y(t) = te^t$ est une solution du problème.

(c) *Montrer que si une fonction y est solution, alors y est à valeurs positives (on pourra s'intéresser à $\frac{y(t)}{e^t}$).*

Soit y une solution du problème et posons, comme suggéré dans l'énoncé, $g(t) = \dfrac{y(t)}{e^t}$. La fonction g est dérivable, de dérivée $g'(t) = \dfrac{y'(t) - z(t)}{e^t}$. Comme on a supposé y solution du problème, on a $y't) \geqslant y(t), \forall t > 0$ donc $g'(t) \geqslant 0$, $\forall t > 0$. Ainsi, on a $g(t) \geqslant g(0), \forall t > 0$. Or $g(0) = y(0) = 0$ donc on a bien $g(t) \geqslant 0, \forall t > 0$ et comme g et y sont de même signe, on a montré que y est à valeurs positives.

4. *On souhaite montrer qu'il n'existe pas de fonction z de $C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ vérifiant :*

$$(P_3) \begin{cases} z'(t) = t^2 + z(t)^2 + z(t), \forall t \geqslant 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

On raisonne par l'absurde : supposons qu'une fonction z vérifie les conditions ci-dessus.

(a) *En se servant des résultats des questions 2 et 3, montrer que pour tout* $t \geqslant 0$, $y(t) = z(t) - x_0(t) \geqslant 0$.

On a $z'(t) = t^2 + z(t)^2 + z(t)$ et $x_0'(t) = t^2 + x_0(t)$ donc

$$z'(t) - x_0'(t) = z(t)^2 + z(t) - x_0(t) \geqslant z(t) - x_0(t)$$

En posant $y(t) = z(t) - x_0(t)$, on a alors $y'(t) \geqslant y(t), \forall t > 0$. De plus, $y(0) = z(0) - x_0(0) = 0$ donc y vérifie les conditions du problème P_2 et nous avons montré à la question 3d) qu'une solution à ce problème est nécessairement à valeurs positives. On a donc $y(t) \geqslant 0, \forall t > 0$ ce qui est équivalent à $z(t) \geqslant x_0(t), \forall t > 0$. Comme, de plus, $z(0) = x_0(0) = 0$, l'inégalité reste vraie pour $t \geqslant 0$.

(b) *Montrer que* $z(t) > 0$ *pour* $t > 0$.

En utilisant la question précédente, il suffit de montrer que $x_0(t) > 0, \forall t > 0$, autrement dit, puisque $x_0(0) = 0$, il suffit de montrer que x_0 est strictement croissante.

On a $x_0'(t) = 2e^t - 2t - 2 = 2(e^t - t - 1)$ ce qui est strictement positif pour $t > 0$ d'après la première question du problème. On a donc bien le résultat souhaité.

(c) *En déduire que z est croissante.*

On a $z'(t) = t^2 + z(t)^2 + z(t) \geqslant z(t)$ et z est à valeurs positives d'après la question précédente donc z' est positive ce qui montre que z est croissante.

La fonction z est croissante, elle admet donc une limite (finie ou non) en $+\infty$, ce résultat était admis dans ce devoir, nous le verrons dans le chapitre limite/continuité.

(d) *Montrer que pour* $t > 0$, $\dfrac{z'(t)}{z^2(t)} \geqslant 1$. On procède par équivalence :

$$\frac{z'(t)}{z^2(t)} > 1 \Leftrightarrow \frac{z't)}{z^2(t)} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{z'(t) - z^2(t)}{z^2(t)} > 0 \Leftrightarrow z'(t) - z^2(t) > 0$$

Or z est solution du problème, on a donc $z'(t) = t^2 + z^2(t) + z(t)$ donc $z'(t) - z^2(t) = t^2 + z(t)$ ce qui est strictement positif pour $t > 0$, d'après la question précédente. On a montré l'inégalité par équivalence.

(e) *Soit* $u > 0$ *fixé. Montrer, pour* $t > u$, *l'inégalité* $\dfrac{1}{z(u)} - \dfrac{1}{z(t)} > t - u$.

D'après la question précédente, la fonction $t \mapsto -\dfrac{1}{z(t)} - t$ est de dérivée strictement positive donc elle est strictement croissante. Pour $t > u$, on a donc $-\dfrac{1}{z(t)} - t > -\dfrac{1}{z(u)} - u$ ce qui est équivalent à

$$\frac{1}{z(u)} - \frac{1}{z(t)} > t - u$$

(f) *En déduire une contradiction.*

On sait que z admet une limite en $+\infty$ et cette limite est forcément strictement positive ou égale à $+\infty$. Dans tous les cas, $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(\dfrac{1}{z(u)} - \dfrac{1}{z(t)} \right) \in \mathbb{R}$. Or $t - u \to +\infty$ et $\dfrac{1}{z(t)} \geqslant t - u$ ce qui est impossible.

On a donc montré par l'absurde qu'une telle fonction z ne peut exister.