

Réponses du TD n 10

Réponse 1 2

Réponse 2 1. Si $a = 1$, le rang vaut 1, sinon il vaut 2.

2. Si $a = 1$, le rang vaut 1, si $a = -2$, le rang vaut 2 sinon il vaut 3.

3. Si $a = -1$, le rang vaut 2, si $a = 1$, le rang vaut 1, sinon il vaut 3.

Réponse 3 $\{(3 - z, 2 - 2z, z), z \in \mathbb{R}\}$.
 $\left(\left(\frac{c+4a+3b}{10}\right), \left(\frac{-2a+b+7c}{20}\right), \left(\frac{-a-2b+c}{5}\right)\right)$.
 $(1, -1, 2)$.

Réponse 4 — Si $9b_2 - 5b_1 + 2b_4 - 6b_3 = 0$ l'ensemble des solutions est alors

$$\left\{\left(-\frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{4} - \frac{b_3}{2} + \frac{3b_4}{2} - y, y, -\frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{4} + \frac{b_3}{2} - \frac{b_4}{2}, \frac{b_1 - b_2}{2}\right), y \in \mathbb{R}\right\}$$

sinon, pas de solution.

— Si $a + 3b - c = 0$. Si elle est vérifiée, l'ensemble des solutions est

$$\left\{\left(\frac{a}{3} + \frac{2b}{3} - \frac{1}{3}z, \frac{a}{3} - \frac{b}{3} + \frac{2}{3}z - t, z, t\right), (z, t) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

sinon, pas de solution.

Réponse 5 Si $\lambda^n \neq 1$, $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$.

Si $\lambda^n = 1$, les solutions sont de la forme $x_1(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1})$, $x_1 \in \mathbb{R}$.

Réponse 6 On a des solutions non nulles si λ est racine de $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

Réponse 7 plus judicieux de commencer par le produit des deux dernières. On trouve la matrice nulle

Réponse 8 On a $S = 5AB - 3BA - 5B^2$ et $T = A^2 - B^2 - 3AB - BA + 2BA^2 - 2A^2B$

Réponse 10 $B^2 = \frac{n(n+1)}{2}B$.

Réponse 11 $A^2 = nA$.

Réponse 13 $J^r = n^{r-1}J$ pour $r \geq 1$.

Réponse 14

$$M^r = \begin{pmatrix} 2^r & 2^{r-1}r & 2^{r-3}r(r-5) \\ 0 & 2^r & 2^{r-1}r \\ 0 & 0 & 2^r \end{pmatrix}.$$

Réponse 15

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ n(-1)^{n-1} & (-1)^n & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2} & n(-1)^{n-1} & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Réponse 16

$$A^n = (0), \forall n \geq 2$$

$$B^n = 3^{n-1}B, \forall n \geq 1.$$

$$C^n = 2^{n-1}C, \forall n \geq 1.$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$E^n = (0) \forall n \geq 3$$

Si on prend $n = 3p + q$ avec $q \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on a $F^n = (-1)^p F^q$.

Réponse 17

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{2n} + 1 & 2^{2n} - 1 & 2^{2n} - 1 \\ 2^{2n} - 1 & 2^{2n} + 2 & 2^{2n} - 1 \\ 2^{2n} - 1 & 2^{2n} - 1 & 2^{2n} + 2 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Réponse 18 } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{Réponse 19 } \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réponse 20 $A^{-1} = A + 2I_n$.

Réponse 21 non

Réponse 22 A et D non inversibles, B et C inversibles.

Réponse 23 oui

Réponse 24 M inversible ssi $1 + 2a + 2b \neq 0$ et $1 + 2a - 2b \neq 0$.

Réponse 25 $V(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0 \leq i < j < n} (a_j - a_i)$.

Réponse 26 $m(-m^3 - 2m^2 + 2m - 3)$.

Réponse 27 $\prod_{k=0}^{n-1} (k - x)$.

Réponse 28 0.

Réponse 29 1. $D_{n+2} = (a + b)D_{n+1} - abD_n$.

2. $D_n = 0$ si $a = b = 0$. Sinon $D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$.

Réponse 30 4

Réponse 31 2 pour le premier et pour le deuxième :

- $a \neq 1$ et $a \neq 1 - n$ et le système est de rang n .
- $a = 1 - n$ et le système est de rang $n - 1$.
- $a = 1$ et le système est de rang 1.

Réponse 32 (S_1) : On a une solution unique pour tout b_1, b_2, b_3, b_4 , c'est

$$\left(\frac{b_1}{4}, \frac{b_2}{4} - \frac{b_3}{2}, \frac{3b_4}{2}, \frac{5b_1}{4} - \frac{9b_2}{4} + \frac{3b_3}{2} - \frac{b_4}{2}, -\frac{3b_1}{2} + \frac{5b_2}{2} - b_3, \frac{b_1}{2} - \frac{b_2}{2} \right)$$

(S_2) : On a des solutions si $b_2 = b_1 + b_3$. L'ensemble des solutions est

$$\{(-2b_1 + 3b_4 - 11z, b_3 - 2z, b_1 - b_4 - b_3, z), z \in \mathbb{R}\}$$

(S_3) : On a des solutions si $b_1 + b_2 - 2b_4 = 0$ et $2b_1 - b_3 - 2b_4 = 0$. L'ensemble des solutions est

$$\{(b_1 - 2b_4 + 3y + t, y, b_4 - 2y, t), (y, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

(S_4) : On a des solutions si $b_2 = -2b_1$ et $b_3 = -b_1$ et $b_4 = 3b_1$. L'ensemble est alors

$$\{(b_1 - 2y - z - 2t, y, z, t), (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\}$$

Réponse 33 $(-3, -2, -1/2)$ et $\{(1, 2 - 2t, t), t \in \mathbb{R}\}$.

Réponse 34 1. $(1, 2, 3)$.

2. pas de solution

3. $\{(3 + 2y - z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$

4. $\left\{ \left(1 + \frac{z}{2} - \frac{t}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{z}{2} + \frac{t}{2}, z, t \right), (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

5. $\{(3 - z, 2 - 2z, z), z \in \mathbb{R}\}$

Réponse 35 $n \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_{ij}$.

Réponse 36 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Réponse 37 $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$.

Réponse 38 $M^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^r - 1 \\ 0 & 2^r & 0 \\ 0 & 0 & 3^r \end{pmatrix}$.

Réponse 39 $(AE_{ij}B)_{rl} = a_{ri}b_{jl}$.

Réponse 41 Coefficient extra-diagonaux nuls, coefficients diagonaux identiques.

Réponse 42 $\mu_k = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$.

Réponse 43 $(a - b)^r I_n + \frac{1}{n} ((bn + a - b)^r - (a - b)^r) J$.