Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2025-2026
Feuille 10

TD 10 : Systèmes linéaires et calcul matriciel .

1 Rang d'un système

Exercice 1.
Déterminer le rang du système

$$\begin{cases} x+2y+t &= a \\ y-z+t &= b \\ x+2y+t &= c \\ x+3y-z+2t &= d \end{cases}$$

Exercice 2.

Soit $a \in \mathbb{R}$, calculer le rang des systèmes suivants :

$$\begin{cases} x_1+ax_2+x_3 &= x \\ ax_1+x_2+x_3 &= y \\ x_1+ax_2+x_3 &= z \end{cases} \begin{cases} x_1+x_2+ax_3 &= x \\ x_1+ax_2+x_3 &= y \\ ax_1+x_2+x_3 &= z \end{cases} \begin{cases} a^2x_1+ax_2+x_3 &= x \\ x_1+x_2+ax_3 &= y \\ x_1+ax_2+a^2x_3 &= z \end{cases}$$

2 Résolution de systèmes

Exercice 3.

Résoudre les systèmes suivants d'inconnues (x,y,z) :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x & +y & +3z & = & 5 \\ x & -y & -z & = & 1 \\ x & & +z & = & 3 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{cccccc} 3x & -2y & +2z & = & a \\ -x & +2y & -3z & = & b \\ x & +2y & +z & = & c \end{array}\right. \left\{\begin{array}{cccccc} 2x & +y & +z & = & 3 \\ 3x & -y & -2z & = & 0 \\ x & +y & -z & = & -2 \\ x & +2y & +z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 4.

Résoudre les systèmes suivants d'inconnues (x,y,z,t) :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x & +y & +4z & +7t & = & b_1 \\ x & +y & +4z & +5t & = & b_2 \\ x & +y & +3z & +2t & = & b_3 \\ x & +y & +z & +t & = & b_4 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{cccccc} x & +2y & -z & +2t & = & a \\ x & -y & +z & -t & = & b \\ 4x & -y & +2z & -t & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 5. la matrice circulante :
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Donner les solutions du système d'inconnues $x_1, \dots, x_n$ en fonction de λ :

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 = \lambda x_n \end{cases}$$

Exercice 6. la matrice compagnon
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $(a_0, a_1 \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. A quelle condition sur λ le système homogène suivant possède-t-il des solutions non nulles? Montrer qu'alors ces solutions sont paramétrées par exactement une variable libre.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & \lambda & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 0 & a_{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & -a_{n-1}+\lambda \end{pmatrix}$$

3 Produit matriciel

Exercice 7.
Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de deux façons différentes. (Quelle est la plus judicieuse?)

Exercice 8.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Développer et simplifier $S = (2A)(3B) - (A+2B)^2 + (A-B)(A+B)$ et $T = (A+B)(2A^2-2B) - 2A^2(A+B) + (-A+B)^2$

Exercice 9.
Montrer que si A est inversible et commute avec B, alors A^{-1} commute avec B.

Exercice 10.
Soit $B = (i)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Calculer B^2.

Exercice 11.
Soit $A = \left(\dfrac{i}{j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, calculer A^2.

Exercice 12.
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A^\top A) = 0$. Montrer que A est la matrice nulle.

4 Calcul de puissances

Exercice 13.
Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$. Calculer J^r pour tout entier $r \in \mathbb{N}$.

Exercice 14.
Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer M^r pour $r \in \mathbb{N}$.

Exercice 15.
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(A + I_3)^3$ est la matrice nulle.
2. En déduire une expression de A^n pour tout entier n.

Exercice 16.
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la puissance n-ème de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(On calculera $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$, ..., on devinera les coefficients de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et on le vérifiera, si besoin par récurrence.)

Exercice 17.
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Montrer que $PDP^{-1} = A$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
3. En déduire A^n pour tout entier n.

5 Calcul de l'inverse

Exercice 18.

Calculer l'inverse de la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 19.

Calculer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 20.
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + 2A - I_n = 0$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

6 Détermination de l'inversibilité d'une matrice

Exercice 21.
La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 22.
Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 23.
La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 24.

Soit $M = \begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix}$. Calculer $\det(M)$ et en déduire une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité pour M.

Exercice 25.

Soit $(a_i)_{i\in N}$ une famille de réels distincts. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$V(a_0,\cdots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que $V(a_0,\cdots,a_n) = \prod_{i=1}^{n}(a_i - a_0)V(a_1,\cdots,a_n)$.
2. En déduire la valeur de $V(a_0,\cdots,a_n)$.

Exercice 26.

Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & m & 2 & -1 \\ m & 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m & 0 & m \end{pmatrix}$

Exercice 27. [CCP]

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & n-x \end{vmatrix}$

Exercice 28. [CCP]

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & \dots & 2n-1 \end{vmatrix}$

Exercice 29.

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \dots & 0 \\ a & a+b & b & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}$

1. Exprimer D_{n+2} en fonction de D_{n+1} et D_n.
2. En déduire une expression de D_n pour tout $n \geqslant 1$.

7 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 30.

Quel est le rang du système

$$\begin{cases} x_2 + x_3 & = a \\ x_3 + x_4 + x_5 & = b \\ x_5 & = c \\ x_5 + x_6 + x_7 & = d \end{cases}$$

Exercice 31.

Donnez le rang des systèmes homogènes suivants :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n & = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \ldots + (n+1)x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ nx_1 + (n+1)x_2 + (n+2)x_3 + \ldots + (2n-1)x_n & = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + \ldots + x_n & = 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + \ldots + x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ x_1 + x_2 + \ldots + ax_{n-1} + x_n & = 0 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + ax_n & = 0 \end{cases}$$

Exercice 32.

Résoudre et discuter suivant les valeurs de b_1, b_2, b_3 et b_4 :

$$(S_1)\begin{cases} x+3y+4z+7t & = & b_1 \\ x+3y+4z+5t & = & b_2 \\ x+3y+3z+2t & = & b_3 \\ x+y+z+t & = & b_4 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+3y+5z+3t & = & b_1 \\ x+4y+7z+3t & = & b_2 \\ y+2z & = & b_3 \\ x+2y+3z+2t & = & b_4 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} x+y+2z-t & = & b_1 \\ -x+3y+t & = & b_2 \\ 2x-2y+2z-2t & = & b_3 \\ 2y+z & = & b_4 \end{cases} \qquad (S_4)\begin{cases} x+2y+z+2t & = & b_1 \\ -2x-4y-2z-4t & = & b_2 \\ -x-2y-z-2t & = & b_3 \\ 3x+6y+3z+6t & = & b_4 \end{cases}$$

Exercice 33.

Résoudre pour $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ les systèmes :

$$T_1 : \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & & = & 1 \\ & \frac{1}{2}x_2 & & = & -1 \end{cases} \quad \text{puis } T_2 : \begin{cases} -2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & = & 1 \end{cases}$$

Exercice 34.
Résoudre :

1. dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} 2y-z &= 1 \\ -2x-4y+3z &= -1 \\ x+y-3z &= -6 \end{cases}$
2. dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x+z &= 1 \\ y+z &= 0 \\ x+y &= 1 \\ 2x+3y &= 0 \end{cases}$
3. dans $\mathbb{R}^3$: $x-2y+z=3$.
4. dans $\mathbb{R}^4$: $\begin{cases} 2x-z+t &= 2 \\ -2y+z+t &= 1 \\ 2x+2y-2z &= 1 \\ 2x-2y+2t &= 3 \end{cases}$
5. dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x+y+3z &= 5 \\ x-y-z &= 1 \\ x+z &= 3 \end{cases}$

Exercice 35.
Soit $B=(b_{ij})$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Calculer $\mathrm{Tr}(ABA)$ où A est la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ avec uniquement des 1 comme coefficients.

Exercice 36.
Donner l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 37.
Soit $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer A^2 et remarquer que $A^2=A+2I_3$. Retrouver son inverse.

Exercice 38.
Calculer M^r pour $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

8 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 39.
Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer le coefficient d'indice (r,l) de la matrice $AE_{ij}B$.
2. En déduire que si AXB est la matrice nulle pour tout $X\in M_n(\mathbb{R})$, alors A ou B est nulle.

Exercice 40.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $A\in M_n(K)$. On suppose que pour tout $X\in M_n(K)$, on a $(XA)^2=(0)$. Montrer que $A=0$.

Exercice 41. ⚙
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On appelle centre de $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble Z des matrices $A\in M_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $M_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire $Z=\{A\in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall B\in M_n(\mathbb{K}), AB=BA\}$.

1. Pour $(k,l)\in\{1,\dots,n\}^2$ et $A\in M_n(\mathbb{K})$, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de A pour que les matrices A et $E_{k,l}$ commutent.
2. En déduire que le centre Z de $M_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices scalaires.

Exercice 42.
Soit $A\in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A+A^{-1}=I_n$. Pour tout entier k, on note $A^{-k}=(A^{-1})^k$. Montrer que pour tout entier k, il existe un réel μ_k tel que $A^k+A^{-k}=\mu_k I_n$ et déterminer μ_k.

Exercice 43.

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et

$$M_{ab}=\begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

Calculer M_{ab}^r pour tout entier r.

Memo

- Comment déterminer le rang d'un système ?
  En l'échelonnant et en comptant le nombre d'équations restantes
- Comment déterminer à quelle(s) condition(s) un système a des solutions ?
  En l'échelonnant et en lisant les dernières lignes dont le membre de gauche est nul
- Comment résoudre un système linéaire ?
  - En faisant des opérations élémentaires (à préciser) sur les lignes
  - En faisant le pivot de Gauss puis en substituant.
- Comment déterminer le rang d'une matrice ?
  - Échelonner la matrice
  - Raisonner sur les lignes/colonnes en petite dimension
- Comment déterminer si une matrice est inversible ?
  - Observer la matrice
  - Déterminer si le système associé possède une unique solution
- Comment déterminer l'inverse d'une matrice A ?
  - Résoudre le système $AX = Y$
  - Faire des opérations élémentaires sur les lignes
  - Trouver son inverse
- Comment déterminer la puissance d'une matrice ?
  - Prendre la puissance des coefficients diagonaux
  - Utiliser la formule du binôme de Newton
  - "Intuiter" une formule et la montrer par récurrence
  - Remarquer que la matrice s'écrit PMP^{-1}
- Comment multiplier des matrices de taille n ?
  Revenir à la définition du produit matriciel