Méthodes pratiques de calcul de limites (Bilan de Terminale)

Le document qui suit est un résumé des méthodes pratiques de calcul de limites vues en Terminale.

Dans la première partie, nous présentons les méthodes générales de traitement des questions de limites (cette première partie sera l'occasion d'exposer les techniques de bases permettant de lever certaines indéterminations très classiques). Nous donnerons dans la seconde partie des théorèmes spécifiques fournissant de nouveaux outils pour aborder les questions de formes indéterminées.

Dans la suite, f désignera une fonction définie[1] sur I, intervalle ou réunion d'intervalles. La lettre a désignera quant à elle soit $+\infty$, soit $-\infty$, soit un réel appartenant à I ou borne exclue de I.[2]

I Méthode générale

I.1 Fonctions de référence

On ne rappelle pas ci-dessous les résultats classiques concernant les fonctions puissances entières et racine carrée.

- **Fonction inverse**
  - $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

    Sans l'écrire telle quelle, on retiendra qu'une forme du type « $\frac{1}{\infty}$ » tend vers 0.
  - $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

    On retiendra de même qu'une forme du type « $\frac{1}{0}$ » tend vers un infini dont le signe dépend du « signe de 0 », c'est à dire du signe du dénominateur.
- **Fonction exponentielle**
  - $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$
- **Fonction logarithme népérien**
  - $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

I.2 Méthode générale

On commence par rappeler ci-dessous ce qu'il faut connaître des formes indéterminées.

Forme indéterminée (F.I.)

- Dire qu'une limite présente une **forme indéterminée (F.I.)** signifie qu'on ne peut pas prévoir cette limite, toutes les limites étant à priori possibles : limite finie (dont 0), limite infinie ou absence de limite.
- Les quatre formes indéterminées principales sont : « $+\infty-\infty$ », « $0\times\infty$ », « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » et « $\dfrac{0}{0}$ ».

Méthode pour déterminer $\lim\limits_{x\to a}f(x)$

Dans cette détermination de limite, ***mentalement, on commencera toujours par faire tendre x vers a dans l'expression de $f(x)$ pour voir à quel type de forme on est confronté.***

- Si on n'est pas en présence d'une forme indéterminée (voir ci-dessus), on conclut à l'aide des théorèmes relatifs aux opérations élémentaires sur les limites (**Partie A**).
- En présence d'une F.I., on transformera l'écriture de $f(x)$ afin de *lever l'indétermination* (**Partie B**).

1. On rappelle que l'**ensemble de définition** d'une fonction f est l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ est défini.
2. La fonction $f:x\mapsto\frac{\sqrt{1-x}}{x}$ serait par exemple définie sur $I=]-\infty\,;0[\cup]0\,;1]$ (à vérifier).

L'étude de la limite de f en a n'aurait ainsi de sens que si $a\in I$ (par exemple $a=-1$ ou $a=0{,}5$ ou $a=1$) ou si a est une borne exclue de I (par exemple $a=0$ ou $a=-\infty$).

Remarques

- On ne redonne pas le tableau relatif aux opérations sur les limites (somme, produit, quotient).
- Les formes « $\dfrac{0}{\infty}$ », « $\dfrac{\infty}{0}$ » ou « $\dfrac{\ell}{0}$ avec $\ell \neq 0$ » ne sont donc pas des formes indéterminées.
- Nous verrons qu'un cas échappe à la méthode générale : celui des polynômes ou des fractions rationnelles quand on cherche à déterminer leurs limites en l'infini.

Partie A : Cas où il n'y a pas de F.I.

1. Premiers exemples avec $a \notin I$

Conformément a ce qui a été annoncé, a est donc une borne exclue de I.
Par ailleurs, dans ces premiers exemples, on s'interdira de transformer l'écriture de $f(x)$.

Exemple 1 : limite en 0 de $f : x \longmapsto \left(3 - \dfrac{1}{x^2}\right)\left(4\sqrt{x} - 1\right)$

Remarque : f étant définie sur $]\,0\,;+\infty[$ (à vérifier), il s'agit en fait ici de la limite lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, soit $x \to 0$ et $x > 0$, qu'on notera plus simplement $x \to 0^+$ (c'est ici implicite, inutile donc de le préciser).

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \ \text{ d'où } \lim\limits_{x\to 0}\left(3 - \dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty \\ \cdot\ \lim\limits_{x\to 0}\left(4\sqrt{x} - 1\right) = -1 \end{array}\right\} \text{ d'où par produit, } \boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty}$$

Exemple 2 : limite en $+\infty$ de $f : x \longmapsto \dfrac{1/\sqrt{x}}{\ln x + 1/\mathrm{e}^x}$

Remarque : en faisant tendre x vers $+\infty$, on aboutirait à une forme « $\frac{0}{\infty}$ » qui n'est pas une F.I.

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \lim\limits_{x\to +\infty} 1/\sqrt{x} = 0 \\ \cdot\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \ \text{ et } \lim\limits_{x\to +\infty} 1/\mathrm{e}^x = 0 \ \text{ d'où } \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln x + 1/\mathrm{e}^x\right) = +\infty \end{array}\right\} \text{ d'où par quotient, } \boldsymbol{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0}$$

Exemple 3 : limite en $-\infty$ de $f : x \longmapsto \left(x^2 + 1\right) + \left(\mathrm{e}^x - 1000\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^2 + 1\right) = +\infty \\ \cdot\ \lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0 \ \text{ d'où } \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\mathrm{e}^x - 1000\right) = -1000 \end{array}\right\} \text{ d'où par somme, } \boldsymbol{\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty}$$

2. Cas où $a \in I$ (avec f continue en a)

Continuité

- Dire qu'une fonction f est **continue** en un réel a appartenant à son ensemble de définition signifie que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- Les fonctions construites à partir des fonctions de référence sont continues sur leur ensemble de définition (ie. en tout réel de leur ensemble de définition).

Exemple 4 : limite en 2 de $f : x \longmapsto \dfrac{\ln x - 1 + \sqrt{x}}{\mathrm{e}^x + \cos x}$

Remarque : f est définie sur $]\,0\,;+\infty[$ puisque les fonctions $\ln$ et racine carrée le sont, avec en outre, pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^x > 1$ soit $\mathrm{e}^x + \cos x \neq 0$.

f est continue sur son ensemble de définition $]\,0\,;+\infty[$ (f est en effet construite à partir de fonctions de référence) et $2 \in]\,0\,;+\infty[$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ soit $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{\ln 2 - 1 + \sqrt{2}}{\mathrm{e}^2 + \cos 2}}$.

3. Cas des formes « $\dfrac{\ell}{0}$ avec $\ell \neq 0$ »

Méthode

Comme cela a déjà été signalé, la forme « $\dfrac{\ell}{0}$ avec $\ell \neq 0$ » (ℓ désigne donc aussi bien un réel que $\pm\infty$) n'est pas une F.I. et donne (en général) une limite infinie.

Pour savoir quel est le signe de cet infini, *il faut étudier le signe du dénominateur* (on parle parfois de l'« étude du signe de 0 »).

Remarque

Comme déjà évoqué, il arrivera parfois qu'il faille envisager deux cas suivant que x tend vers a par valeurs supérieures (« $x \to a$ avec $x > a$ » que l'on notera plus simplement « $x \to a^+$ ») ou par valeurs inférieures (« $x \to a$ avec $x < a$ » que l'on notera plus simplement « $x \to a^-$ »).

Exemple 5 : limite en 1 de $f : x \longmapsto \dfrac{-3x+2}{(x-1)^4}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to 1} (-3x+2) = -1 \\ \bullet \lim\limits_{x\to 1} (x-1)^4 = 0^+ \end{array}\right\} \text{ d'où par quotient, } \boldsymbol{\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty}$$

Remarque : il est ici inutile d'envisager deux cas (suivant que x tend vers 1 par valeurs supérieures ou inférieures) puisqu'il est clair que $(x-1)^4 > 0$ pour tout $x \neq -1$: on notera pour le préciser $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)^4 = 0^+$.

Exemple 6 : limite en -1 de $f : x \longmapsto \dfrac{1+4x}{x+1}$

Remarque : on aurait une forme « $\frac{-3}{0}$ » avec le signe du dénominateur ne posant pas de problème puisqu'il est du type $ax+b$ (il est donc inutile d'en mener l'étude).

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to -1} (1+4x) = -3 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} (x+1) = 0^- \end{array}\right\} \text{ d'où par quotient, } \boldsymbol{\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to -1} (1+4x) = -3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} (x+1) = 0^+ \end{array}\right\} \text{ d'où par quotient, } \boldsymbol{\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty}$$

Exemple 7 : limite en 2 de $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2-2x-10}{-x^2-x+6}$

- $\lim\limits_{x\to 2} (2x^2-2x-10) = 2(2)^2 - 2(2) - 10 = -6$
- $\lim\limits_{x\to 2} (-x^2-x+6) = 0$

On est donc amené à étudier le signe de $-x^2-x+6$.

On résout $-x^2-x+6=0$: $\Delta = 25$ et on trouve comme racines $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$ (il est normal de retrouver que 2 est racine).

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$-x^2-x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Au vu du tableau :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to 2^-} (2x^2-2x-10) = -6 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} (-x^2-x+6) = 0^+ \end{array}\right\} \text{ d'où par quotient, } \boldsymbol{\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to 2^+} (2x^2-2x-10) = -6 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} (-x^2-x+6) = 0^- \end{array}\right\} \text{ d'où par quotient, } \boldsymbol{\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty}$$

Exemple 8 : limite en 0 de $f : x \longmapsto \dfrac{x+2}{1-\mathrm{e}^x}$

- $\lim\limits_{x\to 0}(x+2) = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0}(1-\mathrm{e}^x) = 0$

On est donc amené à étudier le signe de $1-\mathrm{e}^x$, ce qui nous conduit à résoudre une équation et une inéquation :

- $1-\mathrm{e}^x = 0 \iff \mathrm{e}^x = 1 \iff x = 0$
- $1-\mathrm{e}^x > 0 \iff -\mathrm{e}^x > -1 \iff \mathrm{e}^x < 1 \iff x < 0$ (ln strictement croissante sur $]0;+\infty[$)

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$1-\mathrm{e}^x$		$+$	0	$-$	

Au vu du tableau :

- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}(x+2) = 2\\ \lim\limits_{x\to 0^-}(1-\mathrm{e}^x) = 0^+\end{array}\right\}$ d'où par quotient, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty}$
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}(x+2) = 2\\ \lim\limits_{x\to 0^+}(1-\mathrm{e}^x) = 0^-\end{array}\right\}$ d'où par quotient, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$

Partie B : Quelques exemples de levées d'indétermination

1. Cas des polynômes et des fractions rationnelles en l'infini [3]

Définitions

- Un **polynôme** est une fonction P définie sur $\mathbb{R}$ pouvant s'écrire $P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ où :
  - $n \in \mathbb{N}$;
  - $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ désignent des réels appelés *coefficients* du polynôme. [4]
- Une fonction définie comme quotient de deux polynômes est appelée **fraction** (ou **fonction**) **rationnelle**.

Avant de donner les résultats généraux, commençons par examiner deux exemples.

Exemple 9 : limite en $-\infty$ de $f : x \longmapsto -3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$

Remarque : on aurait une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ » ; pour lever l'indétermination, on factorise par la puissance de x de plus haut degré (ici x^3).

Si $x \neq 0$, $f(x) = x^3\left(-3 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{7}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}\right)$.

- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 = -\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty}\left(-3 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{7}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}\right) = -3\end{array}\right\}$ d'où par produit, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty}$

Exemple 10 : limite en $+\infty$ de $f : x \longmapsto \dfrac{4x^3 - 3x + 1}{-3x^4 + x^2 - 1}$

Remarque : on aurait une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » ; pour lever l'indétermination, on factorise le numérateur et le dénominateur par la puissance de x de plus haut degré (ici x^3 et x^4).

Si $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x^3\left(4 - 3/x^2 + 1/x^3\right)}{x^4\left(-3 + 1/x^2 - 1/x^4\right)} = \dfrac{1}{x}\left[\dfrac{4 - 3/x^2 + 1/x^3}{-3 + 1/x^2 - 1/x^4}\right]$

- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{4 - 3/x^2 + 1/x^3}{-3 + 1/x^2 - 1/x^4}\right] = -\dfrac{4}{3}\end{array}\right\}$ d'où par produit, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0}$

3. Il s'agit en fait de « fonctions polynômiales » et de « fonctions rationnelles » : nous le verrons plus tard dans l'année, derrière les termes « polynômes » et « fractions rationnelles » se cachent en réalité de nouveaux *objets* mathématiques. *Par souci de simplification, nous ne distinguerons pas dans ce poly polynôme et fonction polynômiale, fraction rationnelle et fonction rationnelle.*

4. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, les $a_k x^k$ sont les **monômes** du polynôme ; si $a_n \neq 0$, $a_n x^n$ est le **monôme de plus haut degré** et n le **degré** du polynôme.

Les deux exemples qui précèdent permettent de concevoir et d'énoncer les propositions qui suivent :

Limite en l'infini d'un polynôme / d'une fraction rationnelle

- La limite en l'infini d'un polynôme est celle de son monôme de plus haut degré.
- La limite en l'infini d'une fraction rationnelle est celle du quotient de ses monômes de plus haut degré.

Remarques

- Confronté à la recherche d'une limite en l'infini d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle, il faudra ***d'emblée*** appliquer la proposition (sans chercher préalablement à savoir à quel type de forme on est confronté).
- Même si on s'autorisera à utiliser directement la proposition, il faudra se rappeler de la transformation d'écriture permettant de lever dans ce cas les F.I. « $+\infty - \infty$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ » : mise en facteur des termes prépondérants.
- Attention, la proposition concerne la recherche d'une limite d'un polynôme ou d'une fonction rationnelle **exclusivement en l'infini** (et pas en un réel comme le montrent les exemples 5 et 6).

Exemple 11 : limite en $-\infty$ de $f : x \longmapsto \dfrac{3x^4 - 2x + 1}{-2x^4 + x^2 + 5}$

Remarque : on note que f est une fraction rationnelle dont on cherche la limite en $-\infty$: on applique directement la proposition précédente, sans même voir à quel type de forme on est confronté.

f étant une fraction rationnelle, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\dfrac{3\cancel{x^4}}{-2\cancel{x^4}}\right]$ soit $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{3}{2}}$.

2. Autres exemples de levées d'indétermination de F.I. « $+\infty - \infty$ » ou « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

Méthodes possibles pour lever un indétermination de F.I. du type « $+\infty - \infty$ » ou « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

Pour lever une indétermination du type précédent on peut :

- mettre en facteur les termes prépondérants ;
- recourir à l'utilisation de l'expression conjuguée. [5]

Exemple 12 : limite en $+\infty$ de $f : x \longmapsto \dfrac{x + \sqrt{x+1}}{2x - 3}$

Remarque : l'analyse préalable montrerait qu'on a une F.I. du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » qu'on propose de lever en factorisant le numérateur et le dénominateur par les termes prépondérants.

$$\text{Si } x \neq 0,\ f(x) = \frac{x\left(1 + \dfrac{1}{x}\sqrt{x+1}\right)}{x\left(2 - \dfrac{3}{x}\right)} \quad \left(\text{avec si } x > 0,\ \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2}}\,\right)$$

$$= \frac{1 + \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2}}}{2 - \dfrac{3}{x}} \quad \text{soit } f(x) = \frac{1 + \sqrt{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}}{2 - \dfrac{3}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \sqrt{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}\right) = 1^{\,*} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - \dfrac{3}{x}\right) = 2 \end{array}\right\} \text{d'où par quotient, } \boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}}$$

(*) clairement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}\right) = 0$ (on verra qu'il s'agit d'un résultat de *composition*)

5. Illustrons la notion d'« expression conjuguée » sur deux exemples :
   - l'expression conjuguée de $3 - \sqrt{2}$ est $3 + \sqrt{2}$: $(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = (3)^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7$;
   - l'expression conjuguée de $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ est $\sqrt{5} - \sqrt{7}$: $(\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{5} - \sqrt{7}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{7})^2 = 5 - 7 = -2$.

   En multipliant une expression écrite à partir de racines carrées par son expression conjuguée, les racines carrées disparaissent.

Exemple 13 : limite en $+\infty$ de $f : x \longmapsto x - \sqrt{x^2+1}$

Remarque : l'analyse préalable montrerait qu'on a une F.I. du type « $+\infty - \infty$ », mais la mise en facteur des termes prépondérants ne permettrait pas de la lever ; on recourt à l'expression conjuguée.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2-(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}} \quad \text{soit } f(x) = \frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = +\infty$ d'où par passage à l'inverse, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

3. Quelques exemples de levées d'indétermination de la F.I. « $\frac{0}{0}$ »

F.I. du type « $\frac{0}{0}$ » avec racine carrée

Pour lever une telle indétermination, une méthode peut consister à de nouveau recourir à l'expression conjuguée.

Exemple 14 : limite en 0 de $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Remarque : l'analyse préalable montre qu'on aurait une F.I. du type « $\frac{0}{0}$ » qu'on va lever grâce à l'expression conjuguée.

$$\text{Pour tout } x > 0,\ f(x) = \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 1^2}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} \quad \text{soit } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

D'où sans difficulté, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}}$.

F.I. du type « $\frac{0}{0}$ » et fraction rationnelle

f désigne une fraction rationnelle et a un réel borne exclue de l'ensemble de définition.
On considère $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et l'on suppose qu'on est en présence d'une F.I. du type « $\frac{0}{0}$ ».
Afin de lever l'indétermination, la méthode va consister à factoriser le numérateur et le dénominateur de la fraction rationnelle par $(x-a)$.

Remarques

- Il est impératif de noter la différence avec le cas où a est infini : ***dans le cas où a est un réel, la limite de la fraction rationnelle en a NE S'OBTIENT PAS en faisant le quotient des termes de plus haut degré !***
- Nous verrons plus tard dans l'année que pour un polynôme P, dire que $P(a) = 0$ (autrement dit que a est racine de P), signifie que P est factorisable par $(x-a)$.
  Pour la fraction rationnelle f, le fait que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ soit une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ » va donc se traduire par la possibilité de factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x-a)$.

Exemple 15 : limite en 2 de $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-4}$

Remarque : f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\,;2\}$ et on est en présence d'une F.I. du type « $\frac{0}{0}$ » ; f étant une fraction rationnelle, cela signifie que 2 est racine du numérateur et du dénominateur, chacun pouvant donc être factorisé par $(x-2)$

- Afin de factoriser le numérateur, on résout $2x^2-5x+2=0$.
  On a $\Delta = 9$ d'où deux racines : $x_1 = 2$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.
  On a ainsi : $2x^2-5x+2 = 2(x-2)(x-\frac{1}{2}) = (x-2)(2x-1)$.

- Par ailleurs, $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

  On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\,;2\}$, $f(x) = \dfrac{\cancel{(x-2)}(2x-1)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \dfrac{2x-1}{x+2}$.

  On en déduit sans peine que $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{3}{4}}$.

II Méthodes complémentaires

Au-delà de la méthode générale, la détermination de certaines limites présentant une F.I. se fait en recourant à des résultats et propositions complémentaires. Nous présentons ci-après quelques méthodes alternatives (lorsque la méthode générale ne permet pas de conclure).

II.1 Limites par comparaison

II.1.1 Cas d'une limite finie

Théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes

Outre f, on se donne deux autres foncions g et h également définies sur I (a désigne toujours un réel appartenant à I ou une borne exclue de I).

En supposant que :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } x \text{ voisin de } a,\ g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \\ \bullet \lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \text{ avec } \boldsymbol{\ell \in \mathbb{R}} \end{array}\right\} \text{ alors } \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$$

Exemple 16 : limite en $+\infty$ de $f : x \longmapsto \dfrac{\cos x}{x^4 - x^2 + 1}$

Remarque : $\cos x$ *n'admet pas de limite en* $+\infty$ *mais est borné ce qui invite à encadrer* $f(x)$.

Comme pour $X \in \mathbb{R}$, $X^2 - X + 1 > 0$ (il s'agit en effet d'un trinôme de discriminant strictement négatif), on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^4 - x^2 + 1 > 0$ (en posant $X = x^2$), ce qui entraîne que f est définie sur $\mathbb{R}$, strictement positive.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{-1}{x^4 - x^2 + 1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^4 - x^2 + 1}$ (puisque $\dfrac{1}{x^4 - x^2 + 1} > 0$).

En tant que polynôme, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^4 - x^2 + 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x^4 - x^2 + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^4 - x^2 + 1} = 0$.

D'après le théorème d'encadrement, il découle des deux lignes précédentes que $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

II.1.2 Cas d'une limite infinie

Théorème de majoration / minoration

Outre f, on se donne une autre fonction g également définie sur I (a désigne toujours un réel appartenant à I ou une borne exclue de I).

1. **Théorème de minoration**

   En supposant que :

   $$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } x \text{ voisin de } a,\ g(x) \leqslant f(x) \\ \bullet \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{ alors } \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$$

2. **Théorème de majoration**

   En supposant que :

   $$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } x \text{ voisin de } a,\ f(x) \leqslant g(x) \\ \bullet \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{ alors } \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Exemple 17 : limite en $-\infty$ de $f : x \longmapsto 3x^3 + 2x^2 + 100 - 2\sin(x^2+1)$

Remarque : sin *étant bornée sur* $\mathbb{R}$, *on pressent que la limite de* $f(x)$ *en* $-\infty$ *est donnée par celle du polynôme* $3x^3 + 2x^2 + 100$, *et qu'elle vaut donc* $-\infty$ *; on se propose par conséquent de majorer* f.

Pour tout $x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \sin(x^2+1) \leqslant 1$ soit $-2 \leqslant -2\sin(x^2+1) \leqslant 2$.
D'où pour tout $x \in \mathbb{R},\ 3x^3+2x^2+100-2\sin(x^2+1) \leqslant 3x^3+2x^2+100+2$ soit $f(x) \leqslant 3x^3+2x^2+102$.
En tant que polynôme, $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^3+2x^2+102) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^3 = -\infty$.

D'après le théorème de majoration, il découle des deux lignes précédentes que $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

II.2 Limite par composition

Limite par composition

Outre f, on se donne une autre fonction g. La lettre b désigne soit un infini, soit un réel, élément de l'ensemble de définition de g ou borne exclue de ce dernier ; c désigne enfin un réel ou un infini.

En supposant que :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \bullet \lim\limits_{X\to b} g(X) = c \end{array}\right\} \text{ alors } \lim\limits_{x\to a} g\big(f(x)\big) = c$$

Remarque

$g(f(x))$ est l'image de x par applications successives des fonctions f puis g : on dira que $g(f(x))$ est l'image de x par la **composée de f par g** qui sera notée $(g \circ f)$.

Exemple 18 : limite en $+\infty$ de $f : x \longmapsto \left(\dfrac{-x^2+x-1}{x^2+1}\right)^4$.

En tant que fraction rationnelle, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x^2+x-1}{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x^2}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-1) = -1$.
On a donc :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x^2+x-1}{x^2+1}\right) = -1 \\ \bullet \lim\limits_{X\to-1} X^4 = 1 \end{array}\right\} \text{ d'où par composition, } \boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1}.$$

Exemple 19 : limite en 0^+ de $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}}$.

Remarque : $\mathrm{e}^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ *et f est définie sur* $]0\,;+\infty[$ *(on peut s'intéresser à la limite de f en 0^+).*

Comme $\lim\limits_{x\to0^+}(\mathrm{e}^x-1) = 0^+$, par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right) = +\infty$.
On a donc :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right) = +\infty \\ \bullet \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array}\right\} \text{ d'où par composition, } \boldsymbol{\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty}.$$

II.3 Croissance comparée

Il s'agit dans ce paragraphe de comparer le comportement :

- en l'infini de la fonction exponentielle avec celui des fonctions puissances ;
- en l'infini et en 0 de la fonction logarithme népérien avec celui des fonctions puissances.

Limites par croissance comparée

n désigne un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}$).

1. **Avec la fonction logarithme népérien**
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,\mathrm{e}^x = 0$
2. **Avec la fonction exponentielle**
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$
   - $\lim\limits_{x\to0^+} x^n \ln x = 0$

Remarques

- En particulier pour $n=1$: $\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ $\quad\cdot \lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$ $\quad\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ $\quad\cdot \lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$.
- Ces résultats de croissance comparée s'expriment aussi par : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$.
- Si l'on considère par exemple $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, le résultat indique que dans la F.I. « $\frac{+\infty}{+\infty}$ », l'infini du numérateur l'emporte sur l'infini du dénominateur, autrement dit qu'en $+\infty$, la fonction exponentielle est prépondérante par rapport à la fonction $x \mapsto x$, ou encore que la fonction exponentielle croît plus rapidement vers $+\infty$ que la fonction $x \mapsto x$: c'est en cela qu'on parle de croissance comparée.
- Ces résultats de croissance comparée s'expriment parfois en disant que la fonction exponentielle l'emporte sur toutes les fonctions puissances, qui l'emportent sur la fonction logarithme népérien.
- Toutes les limites ci-dessus présentent une F.I. du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » ou « $0\times\infty$ » : elles constituent de nouvelles limites de référence qui peuvent être utilisées telles quelles.

Exemple 20 : limite en $+\infty$ de $f : x \longmapsto 3x^5 - 2\,\mathrm{e}^x$.

Remarque : on aurait une F.I. du type « $+\infty-\infty$ » qu'on va lever en factorisant par le terme prépondérant, à savoir e^x.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x\left(\dfrac{3x^5}{\mathrm{e}^x} - 2\right)$ et on a :

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \\ \cdot \text{ par croissance comparée } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^5}{\mathrm{e}^x}\right) = 0 \text{ d'où } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^5}{\mathrm{e}^x} - 2\right) = -2 \end{array}\right\} \text{ par produit, } \boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}.$$

Exemple 21 : limite en 0^+ de $f : x \longmapsto \dfrac{2}{x^2} + \ln x$.

Remarque : on aurait une F.I. du type « $+\infty-\infty$ » qu'on va lever en factorisant par le terme prépondérant, à savoir $\frac{1}{x^2}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(2 + x^2\ln x\right)$ et on a :

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty \\ \cdot \text{ par croissance comparée } \lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2\ln x\right) = 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to0^+}\left(2 + x^2\ln x\right) = 2 \end{array}\right\} \text{ par produit, } \boldsymbol{\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty}.$$

II.4 Limite et dérivation

Dans ce paragraphe, a désigne un réel appartenant à I.

Taux d'accroissement et dérivabilité

- Le **taux d'accroissement de f en a** est la fonction T_a définie sur $I\setminus\{a\}$ par $T_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
- Si T_a admet une *limite finie* en a, **f est dite dérivable en a**.
  Cette limite finie est appelée **nombre dérivé de f en a** et se note $\boldsymbol{f'(a)}$.

Application à la détermination de limites

Dans le cadre de la recherche de la limite en a d'une expression pouvant s'écrire sous la forme $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (f étant une fonction à mettre en évidence), si f est dérivable en a, on aura : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

Remarques

- La recherche de la limite en a d'une expression pouvant s'écrire sous la forme $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ présente toujours une F.I. du type « $\frac{0}{0}$ ».
- En effectuant le changement de variable $x = a+h$ ($\Leftrightarrow h = x-a$), le taux d'accroissement de f en a s'écrit également : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ($h\neq0$).
  Avec cette écriture, dire que f est dérivable en a signifie alors que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ($h\neq0$) admet une limite finie lorsque h tend vers 0.

- Cette méthode permet de déterminer certaines limites très classiques, qui pourront pour ainsi dire être considérées comme de nouvelles limites de référence (nous en proposons ci-après quelques unes).

Exemple 22 : Quelques limites classiques

- $\displaystyle \boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}}$

  On a : $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x-0}$ et on reconnaît le taux d'accroissement de la fonction exponentielle (exp) en 0.

  Or exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc en particulier en 0) avec $\exp' = \exp$.

  Il en découle que $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \exp(0)$ soit $\displaystyle \boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1}$.

- $\displaystyle \boldsymbol{\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}}$

  On a : $\dfrac{\ln x}{x-1} = \dfrac{\ln x - \ln 1}{x-1}$ et on reconnaît le taux d'accroissement de la fonction ln en 1.

  Or ln est dérivable sur $]\,0\,;+\infty[$ (donc en particulier en 1) et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

  Il en découle que $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{1}{1}$ soit $\displaystyle \boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x-1} = 1}$.

- $\displaystyle \boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}$

  On a : $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x - \sin 0}{x-0}$ et on reconnaît le taux d'accroissement de la fonction $\sin$ en 0.

  Or sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc en particulier en 0) avec $\sin' = \cos$.

  Il en découle que $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \cos 0$ soit $\displaystyle \boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$.